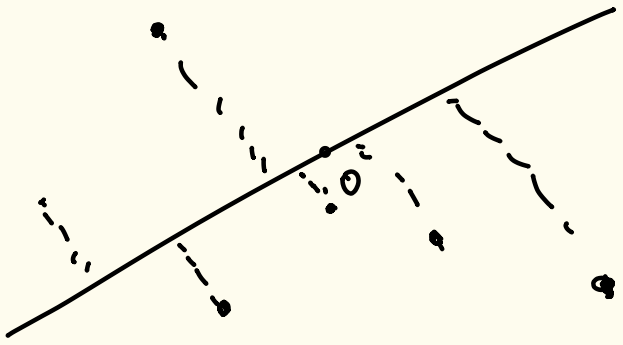
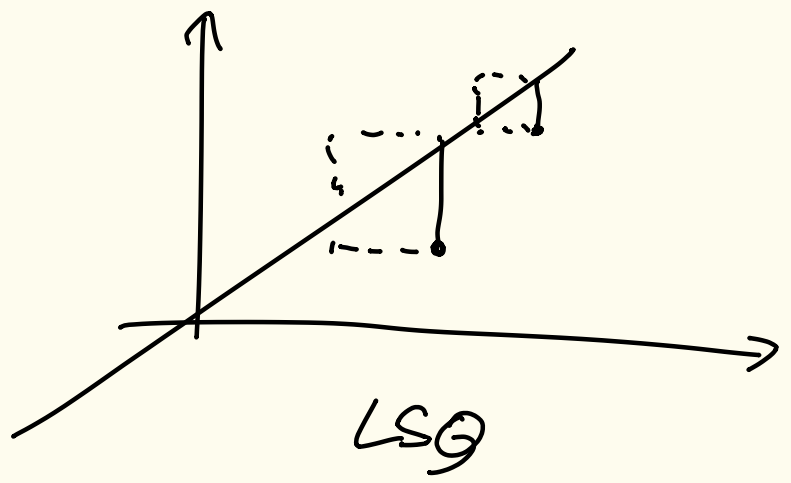
$$v^T B v = v^T(\lambda v) = \underbrace{\lambda v^T v}_{\|v\|^2 = 1} = \lambda$$

Promítání bodů na podp. dim 1





$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \| a_i - (a_i^T x)\, x \|^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\|a\|^2 - 2(a_i^T x) + (a_i^T x)^2 \underbrace{x^T x}_{1,\ \text{díky předpokladu } \|x\|=1} \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\|a\|^2 - (a_i^T x)^2 \right) \rightarrow \text{minimalizace dat bodů}$$

$\Downarrow$ je stejné jako maximální součet $(a_i^T x)^2$

$$\max \sum_{i=1}^{n} (a_i^T x)^2 \quad \begin{bmatrix} a_1^T x \\ \vdots \\ a_n^T x \end{bmatrix} \rightarrow \|Ax\|^2$$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $v \in \mathbb{C}^n$, $\lambda \in \mathbb{C}$

$x^T \underbrace{A A^T}_{B} x$

$Av = \lambda v$

λ je vlastní číslo a v je vlastní vektor

$\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ a $V = [v_1, \dots, v_n]$

platí $AV = V\Lambda$

$Av = \lambda v$ $\quad AV = A[v_1, \dots, v_n] = [Av_1, \dots, Av_n] =$

$= [\lambda_1 v_1, \dots, \lambda_n v_n] =$

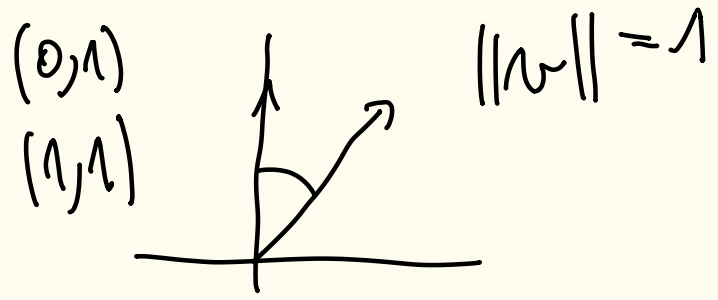
$= [v_1, \dots, v_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$

Spektrální rozklad

Pro diagonalizovatelnou A platí:

$A = V\Lambda V^{-1}$ a $\Lambda = V^{-1} A V$

$\Lambda = \mathrm{diag}(2, -1)$



konvence $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$

matice $V = [v_1, \dots, v_n]$ je ortogonální

Platí $A = V\Lambda V^T = \lambda_1 v_1 v_1^T + \dots + \lambda_n v_n v_n^T$

$v_i v_i^T$ jsou ortog. projektory na vzdálenost

kde matice

kolmá průmět o směrech v_i

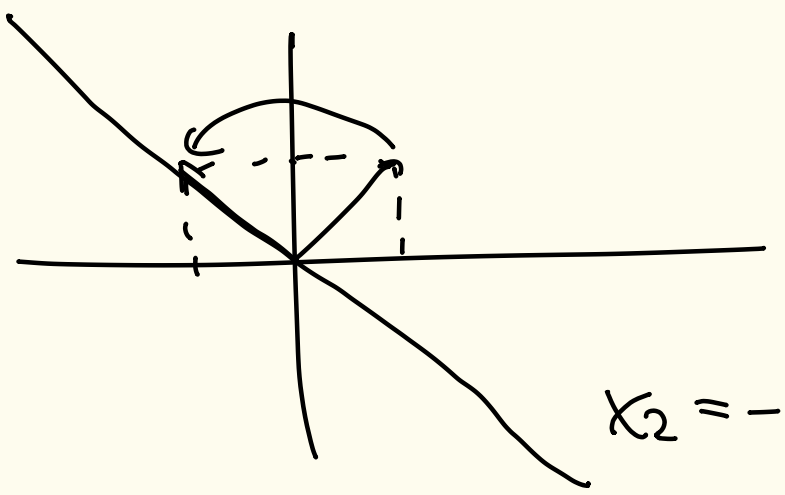
$V\Lambda V^T = [v_1 \dots v_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 v_1 & \dots & \lambda_n v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{bmatrix} = \lambda_1 v_1 v_1^T + \dots + \lambda_n v_n v_n^T$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad f(x) = Ax = (-x_2, -x_1)$$

$u = (1,1) \quad \lambda_1 = -1$

$v = (-1,1) \quad \lambda_2 = 1$



$x_2 = -x_1$

$$\frac{v}{\|v\|} \qquad V = \begin{bmatrix} \frac{v}{\|v\|} & \frac{u}{\|u\|} \end{bmatrix}$$

$$\Lambda = \mathrm{diag}(+1, -1)$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^n \\ V^T \downarrow & & \uparrow \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\Lambda} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

QR Algorithmus

$$A_{i+1} = RQ = IRQ = Q^T Q R Q$$

A_i

Google

$A \cdot x = x$

$$f(x) = \|Ax - b\|^2 = (Ax-b)^T(Ax-b) = x^T A^T Ax - x^T A^T b - b^T Ax + b^T b$$

$(x^T A^T b)^T \rightarrow$ jedoczło

$$y^T y = \|y\|^2$$

$$= x^T A^T Ax - 2x^T Ax + b^T b$$

Matice je positivně semidefinitní, pokud

$\forall x \in \mathbb{R}^n : x^T A x \geq 0$ $\quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symetrická

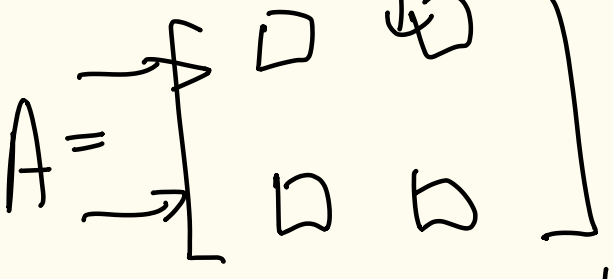
Q: 1.) A positivně semidef

2.) Vlastní čísla A jsou nezáporná

3.) Existuje matice $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ taková, že $A = B^T B$ (otravná)

4.) Všechny hl. minory matice A jsou nezáporné

$y^T y = \|y\|^2$

$A =$ 

$A^T A$ → positivně semidefinitní

$$\lambda_i = \lambda_i \underbrace{(v_i^T v_i)}_{\wedge} = v_i^T \lambda v_i \geq 0$$

PSD

$$f(x) = x^T A x = \underbrace{x^T V}_{y^T} \Lambda \underbrace{V^T x}_{y}$$

$A = V \Lambda V^T$ je spektrální rozklad

$= y^T \Lambda y$ po substituci