

**Příklady z první části vyřešte a odpovědi včetně postupu napište do připravených mezer.**

1. (2 body) Najděte vzdálenost bodu  $\mathbf{z} = (1, 0, 1, 0) \in \mathbb{R}^4$  od nadroviny  $\{\mathbf{x}; \mathbf{a}^T \mathbf{x} = b\}$ , kde  $\mathbf{a} = (1, 1, 1, 2)$ ,  $b = 3$ .

Můžeme využít např. známého vzorce  $\frac{|\mathbf{a}^T \mathbf{z} - b|}{\|\mathbf{a}\|} = \frac{|(1,1,1,2)(1,0,1,0) - 3|}{\|(1,1,1,2)\|} = \frac{1}{\sqrt{7}}$ . K jeho odvození stačí vědět, že velikost pravoúhlého průmětu vektoru  $\mathbf{z}$  na přímku se směrem  $\mathbf{a}$  je  $\frac{|\mathbf{a}^T \mathbf{z}|}{\|\mathbf{a}\|}$ . Pro získání vzdálenosti od té nadroviny ale musíme vektor posunout o  $-\mathbf{x}_0$ , kde  $\mathbf{x}_0$  je libovolný vektor splňující  $\mathbf{a}^T \mathbf{x}_0 = b$ . Tím dostaneme  $\frac{|\mathbf{a}^T (\mathbf{z} - \mathbf{x}_0)|}{\|\mathbf{a}\|} = \frac{|\mathbf{a}^T \mathbf{z} - b|}{\|\mathbf{a}\|}$ .

2. Nechť  $X = \text{span}\{(1, 2, 3, 4), (1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0)\}$ . Najděte

- a) (1 bod) bázi podprostoru  $X^\perp$ ,
- b) (1 bod) matici ortogonálního projektoru na podprostor  $X^\perp$ ,
- c) (1 bod) matici ortogonálního projektoru na podprostor  $X$ .

a)  $X^\perp = \text{span}\{(2, 0, -2, 1)\}$ , b)  $\mathbf{U} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ , projektor  $\mathbf{P} = \mathbf{U}\mathbf{U}^T = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 4 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ , c)  $\mathbf{I} - \mathbf{P}$ .

3. Máme 5 pozorování  $(0, 1), (1, 1), (2, 3), (3, 3), (4, 4)$  tvaru  $(x_i, y_i)$ . Hledáme optimální regresní přímku  $y = \theta_1 x + \theta_2$ , kde  $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$  jsou hledané parametry.

- a) (1 bod) Formulujte úlohu maticově jako problém nejmenších čtverců.
- b) (2 body) Vyřešte tento problém.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Hledáme  $\theta \in \mathbb{R}^2$  minimalizující  $\|\mathbf{A}\theta - \mathbf{b}\|^2$ . To je to samé, jako řešit soustavu normálních rovnic  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}\theta = \mathbf{A}^T \mathbf{b}$ , což je soustava

$$\begin{bmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ 12 \end{bmatrix},$$

jejíž jediné řešení je  $\theta_1 = \theta_2 = \frac{4}{5}$ .

4. Pro matici  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{15 \times 5}$  hledáme nejbližší matici hodnosti  $\leq 3$ . Víme, že matice  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  má vlastní čísla  $2, 1, 4, 9, 0$ .

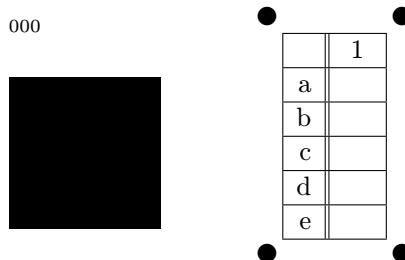
- a) (1 bod) Formulujte úlohu maticově jako optimalizační problém a napište hodnotu účelové funkce v optimu.
- b) (1 bod) Jaké bude optimální řešení tohoto problému, budeme-li hledat matici hodnosti  $\leq 4$ ?

- a)  $\min \|\mathbf{B} - \mathbf{A}\|^2$  pro  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{15 \times 5}$ , kde  $\text{rank } \mathbf{B} \leq 3$ . V optimu je chyba  $s_4^2 + s_5^2 = 1$ . b) Protože  $\mathbf{A}$  má podle hodnot singulárních čísel hodnost 4, bude optimální řešení právě  $\mathbf{A}$  a chyba bude nulová.

V každém z následujících kvízových příkladů je právě jedna odpověď správně. Odpovědi vyznačte do tabulky křížky. Nechcete-li na nějaký příklad odpovědět, sloupec v tabulce ponechte prázdný. Pokud již vyznačený křížek chcete odstranit, políčko s křížkem zcela vyplňte barvou.

**ODPOVĚDI NEVYZNAČENÉ V TABULCE NEBUDOU ZAPOČÍTÁNY.**

(Za každou správnou odpověď je 1 bod.)



Příklady z první části vyřešte a odpovědi včetně postupu napište do připravených mezer.

1. Nechť  $X = \{(x_1, x_2, x_3, x_4); x_1 = x_4\}$ ,  $\mathbf{z} = (4, 3, 2, 1)$ . Najděte kolmou projekci vektoru  $\mathbf{z}$

- a) (2 body) na  $X$ ,
- b) (1 bod) na  $X^\perp$

Je snadnější začít podúlohou b), neboť  $X^\perp$  je generován pouze jedním vektorem. b)  $\mathbf{y} = \frac{(4,3,2,1)(1,0,0,-1)}{\sqrt{2}} = \frac{(1,0,0,-1)}{\sqrt{2}}$ , a)  $\mathbf{x} = \mathbf{z} - \mathbf{y} = (5/2, 3, 2, 5/2)$

2. (2 body) Pro afinní podprostor  $X = (1, 2, 3, 4) + \text{span}\{(1, 0, 1, 0), (2, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 1)\}$  najděte matici a vektor pravých stran soustavy  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ , ježíž řešení je  $X$ .

Například  $\mathbf{A} = [0 \ -1 \ 0 \ 1]$  (jednořádková matice),  $b = 2$ .

3. Závislost proměnné  $z$  na proměnných  $x, y$  modelujeme regresní funkcí  $z \approx f(x, y) = a(x-y)^2 + be^{x+y} + cxy + d$ . Odhadujeme parametry  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  funkce z naměřených bodů  $(x_i, y_i, z_i)$ ,  $i = 1, \dots, 100$ , ve smyslu nejmenších čtverců.

- a) (2 body) Formulujte úlohu v maticové podobě.
- b) (1 bod) Za jakých předpokladů bude mít úloha jediné řešení? Takové řešení napište.

a) Vektor neznámých parametrů je  $\mathbf{p} = (a, b, c, d)$ , matice  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{100 \times 4}$  má v řádku  $i$  vektor  $((x_i - y_i)^2, e^{x_i+y_i}, x_i y_i, 1)$  a dále  $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_{100})$ . Hledáme minimum funkce  $\|\mathbf{Ap} - \mathbf{z}\|^2$ . b) Má-li  $\mathbf{A}$  lineárně nezávislé sloupce, pak je jediné optimální řešení  $\mathbf{A}^+ \mathbf{z} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{z}$ .

4. Matice  $\mathbf{A}$  typu  $10^4 \times 50$  má prvky 0 nebo 1. Každý řádek  $i$  odpovídá jedné osobě a každý sloupec  $j$  streamovací službě (Netflix, Spotify atd.), přičemž  $a_{ij} = 1$  právě tehdy, když si osoba  $i$  předplácí službu  $j$ .

- a) (1 bod) Co vyjadřují prvky matice  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ ? Interpretujte jejich numerické hodnoty.
- b) (1 bod) Matice  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  má jen 15 nenulových singulárních čísel  $s_1, \dots, s_{15}$ . Napište teoretickou chybu approximace matice  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  maticí hodnosti nejvýše 10.

- a) Složka  $b_{ij}$  matice  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  udává, kolik lidí celkem předplácí současně služby  $i$  a  $j$ . b) Chyba je  $s_{11}^2 + \dots + s_{15}^2$ .

V každém z následujících kvízových příkladů je právě jedna odpověď správně. Odpovědi vyznačte do tabulky křížky. Nechcete-li na nějaký příklad odpovědět, sloupec v tabulce ponechte prázdný. Pokud již vyznačený křížek chcete odstranit, políčko s křížkem zcela vyplňte barvou.

**ODPOVĚDI NEVYZNAČENÉ V TABULCE NEBUDOU ZAPOČÍTÁNY.**

(Za každou správnou odpověď je 1 bod.)



	1
a	
b	
c	
d	
e	

1. Nechť  $\mathbf{A}$  je matice s lineárně nezávislými řádky. Matice ortogonálního projektoru na podprostor  $\text{null } \mathbf{A}^T$  je

(a) neplatí žádné uvedené tvrzení

(b)  $\mathbf{I} - \mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{A}$

(c)  $\mathbf{I} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T$

(d)  $\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{A}$

ll (e)  $\mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T$

2. Rozhodněte, co je správně.

(a) neplatí žádné z uvedených tvrzení

(b)  $\text{rank}(\mathbf{AB}) = \text{rank } \mathbf{A} \text{ rank } \mathbf{B}$

(c)  $\text{rank}(\mathbf{AB}) \leq \min\{\text{rank } \mathbf{A}, \text{rank } \mathbf{B}\}$

(d)  $\text{rng } \mathbf{AB} \subseteq \text{rng } \mathbf{B}$

fl (e)  $\text{rng } \mathbf{AB} = \text{rng } \mathbf{A}$

3. Máme matice  $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$  takové, že každá matice  $\mathbf{A}_i$  má ortonormální sloupce. Označme  $\mathbf{B} = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \cdots \mathbf{A}_k$  součin těchto matic.

(a) Matice  $\mathbf{B}$  je ortogonální.

(b) Matice  $\mathbf{B}$  má ortonormální sloupce, ale nemusí být ortogonální.

(c) Matice  $\mathbf{B}$  je ortogonální jen tehdy, když  $k \leq 2$ .

(d) Matice  $\mathbf{B}$  je identická.

ll (e) Neplatí žádné výše uvedené tvrzení.

4. Nechť  $n \geq 2$  a  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  je nenulový vektor. Ortogonální projektor promítající na podprostor  $\text{span}\{\mathbf{a}\}$  je

(a) je singulární matice

(b) je matice plné hodnosti

(c) je symetrická regulární matice

(d) je široká matice, která není čtvercová

ll (e) žádná z uvedených možností

5. Pro která  $a \in \mathbb{R}$  je matice  $\begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  ortogonální projektor?

(a) žádná z uvedených možností

(b) pro  $a = 0$

(c) pro  $a \in \{0, 1\}$

(d) pro  $a \in [0, 1]$

fl (e) pro  $a \geq 0$

6. Množina  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; \mathbf{a}^T \mathbf{x} = b\}$ , kde  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ ,

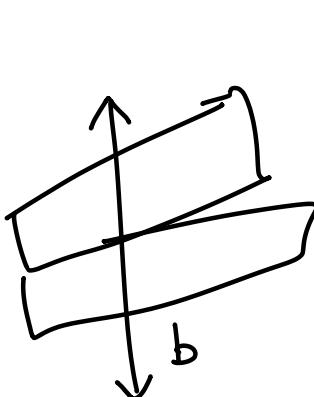
(a) je affinní podprostor dimenze  $n - 1$

(b) je vždy lineární podprostor

(c) je vždy přímka, která nemusí procházet počátkem

(d) je konečná

ll (e) nesplňuje žádnou z uvedených možností



$$\frac{\mathbf{a}\mathbf{a}^T}{\|\mathbf{a}\|^2} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

7. Máme zadánu symetrickou matici  $\mathbf{A}$  rádu  $n$ .

- (a) Její nejmenší vlastní číslo splňuje  $\lambda \leq \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$  pro libovolný vektor  $\mathbf{x}$  takový, že  $\|\mathbf{x}\| = 1$ .
- (b) Její největší vlastní číslo  $\lambda$  je vždy kladné a platí  $\lambda = \max \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$  pro vektory  $\mathbf{x}$  splňující  $\|\mathbf{x}\| = 1$ .
- (c) Optimální řešení úlohy  $\max \{\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} | \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$  vždy existuje.
- (d) Kvadratická forma  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$  nabývá vždy maxima pro nějaký vektor  $\mathbf{x}$  splňující  $\|\mathbf{x}\| = 1$ .
- (e) Každý vlastní vektor odpovídající největšímu vlastnímu číslu matice  $\mathbf{A}$  je řešením úlohy  $\max \{\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} | \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$ .

8. Pro úlohu nejmenších čtverců  $\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \|\mathbf{y} - \mathbf{A} \mathbf{x}\|^2$  platí:

- (a) Optimálních řešení může být nekonečně mnoho.  
Hodnota v optimu je vždy 0.  $\rightarrow$  nejm. čtv.
- (b) Úloha nemusí mít optimální řešení.
- (c) Optimální řešení je vždy tvaru  $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{y}$ .
- (d) Každé řešení úlohy nejmenších čtverců je i řešením soustavy  $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}$ .

9. Hledáme affinní podprostor  $X$  dimenze 5 minimalizující součet čtverců kolmých vzdáleností od vektorů  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{1000} \in \mathbb{R}^{50}$ .

- (a)  $X$  je affinním podprostorem prostoru  $\mathbb{R}^{50}$ .
- (b)  $X$  je affinním podprostorem prostoru  $\mathbb{R}^5$ .
- (c) Neplatí žádná z uvedených možností.
- (d) Hledaný affinní podprostor  $X$  nemusí existovat.
- (e)  $X$  je vždy lineárním obalem 5 lineárně nezávislých vektorů.

10. Rozhodněte, co platí pro matici  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ .  $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 4-\lambda \end{bmatrix}$  indefinitní

- (a) Neplatí žádná z uvedených možností.

~~(b)~~  $\mathbf{A}$  je pozitivně definitní.

~~(c)~~  $\mathbf{A}$  má vlastní číslo 0.

~~(d)~~ Kvadratická forma  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$  má minimum v bodě 0.

~~(e)~~ Optimální hodnota úlohy  $\min \{\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} | \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \|\mathbf{x}\| = 1\}$  je kladná.

$\lambda = 0$  má poset svou vlastnost  
 $\mathbf{A}$  má plný rang

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda) - 9 = 0$$

$$\mathbf{D} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1-\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \quad \lambda_3 = 0$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} =$$

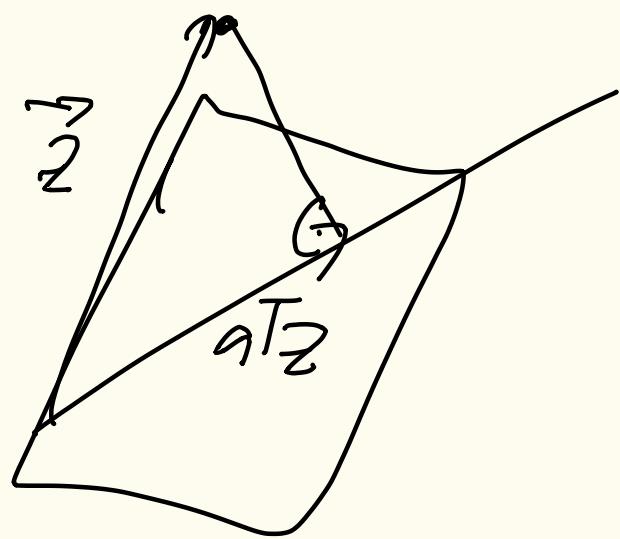
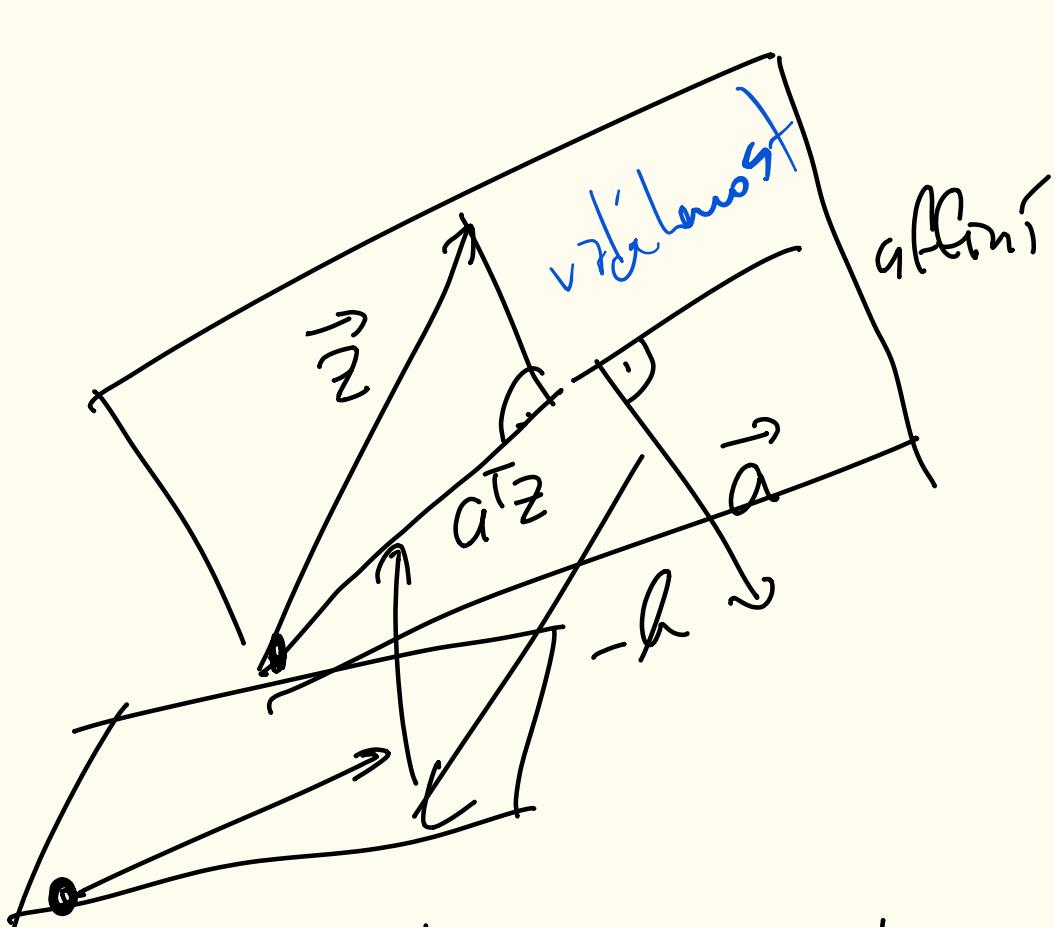
$$\begin{bmatrix} x_1 + 3x_2 & 3x_1 + 4x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1(x_1 + 3x_2) + x_2(3x_1 + 4x_2)$$

$$\begin{aligned} \text{let } x &= x_1 \\ \text{let } y &= x_2 \end{aligned}$$

$$x^2 + 3xy + 3x^2y + 4y^2$$

$$\min \{x^2 + 6xy + 4y^2\} \text{ for } xy \in \mathbb{R}$$

(1) Vzdálenost body  $z = (1, 0, 1, 0) \in \mathbb{R}^4$  od množiny  $\{x; a^T x = b\}$ , kde  $a = (1, 1, 1, 2)$  a  $b = 3$



$$\text{lineární podpr.: } \frac{|a^T z|}{\|a\|}$$

$$\{x; a^T x = b\}$$

$$\text{affinní } \frac{|a^T z - b|}{\|a\|}$$

(2)  $X = \text{span} \{(1, 2, 3, 4), (1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0)\}$

$$X = \dim 3$$

(a) báze  $X^\perp$ :

$$\begin{vmatrix} +e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \\ +1 & 0 & 1 & 0 \\ -0 & +1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1.$$

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_3 & e_4 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -4e_1 + 4e_3 - 2e_4 = (-4, 0, 4, -2) =$$

$$x = (-2, 0, 2, -1) \checkmark$$

vektorský součet.

$X^\perp = \dim 1$  je ortogonální množina k  $X$  (charakterickou je  $\langle \cdot, \cdot \rangle = 0$ )

$$(h) V = \frac{x}{\|x\|} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\frac{1}{3} \|x\| = 3 \Rightarrow 1$$

outg.  
 $P^\perp = UU^\top = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 4 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

$U^\top \rightarrow$  vektorsumme

$$P^\perp = I \Rightarrow \text{rank } 1$$

outg. proj. auf  $X^\perp$

rank 1

(c) outg. projektion auf  $X$

$$I - P^\perp$$

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -3 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

- ③ (0,1) (1,1) (2,3) (3,3) (4,4)

$$(x_i, y_i)$$

$$y = \theta_1 x + \theta_2, \text{ kde } \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$$

obecně

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Ax = b$$

$$\min \|Ax - b\|^2$$

$$A \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 0$$

Wejm. čtverce

$$A^T A \theta = A^T b$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 01 \\ 11 \\ 21 \\ 31 \\ 41 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$A^T b = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$\left( \begin{array}{cc|c} 30 & 10 & 32 \\ 10 & 5 & 12 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 30 & 10 & 32 \\ -30 & -15 & -36 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 30 & 10 & 32 \\ 0 & 5 & 4 \end{array} \right)$$

$$5\theta_2 = 4$$

$$15\theta_1 = 12$$

$$\theta_2 = 4/5$$

$$\theta_1 = \frac{12}{15} = 4/5$$

$$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/5 \\ 4/5 \end{bmatrix}$$

$$15 \quad 5 \quad 16$$

(4.) matici  
 $A \in \mathbb{R}^{15 \times 5}$  hledáme neblížší matici hodnoty  $\leq 3$ ,  
Víme, že  $A^T A$  má eigen 2, 1, 4, 9, 0

(a)  $\min \|B - A\|^2$  pro  $B \in \mathbb{R}^{15 \times 5}$ , kde  $\text{rank } B \leq 3$

(b)  $A$ , jehož  $\text{rank}(A) = 4$ , dlehož je singul.

$$(1) X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

vorwärts det. paddle with slope

$$X^\perp = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} e_1 + e_2 & e_2 & e_3 & e_4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} e_1 & e_3 & e_4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = e_1 - e_4 = (1 \ 0 \ 0 \ -1)$$

$$\text{projektion } y = \frac{a a^T}{a^T a} z = \frac{a^T z}{a^T a} \quad a = \frac{3}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$(1 \ 0 \ 0 \ -1) \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3$$

problem (a)

$$z = x + y \Rightarrow x = z - y$$

$$x = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{3}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/2 \\ 3 \\ 2 \\ 5/2 \end{bmatrix}$$

(2.)

$$X = (1, 2, 3, 4) + \text{span} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad \mathbb{R}^4$$

$$Ax = b \quad \text{nachgelöst } A = [0, 2, 0, -2] \quad b = -4$$

$$Ax = b \quad A^T A x = A^T b \quad | \cdot (A^T A)^{-1} A^T b$$

(3)  $\min \|Ap - z\|^2$ ,  
 kde  $p = (a, b, c, d)$  → hledáme, neznámá  
 $A \in \mathbb{R}^{100 \times 4}$   
 matice má v i-tém řádku  
 vektor  $[a(x_i^2) \quad b(x_i^2) \quad c(x_i^2) \quad d]$   
 řádky lze mít jen rozdíl  
 iff má LN sloupec

$$\begin{array}{c|cccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} = - \begin{vmatrix} e_2 & e_3 & e_4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= e_2 - e_4 + e_2 - e_4 =$$

$$A = [0, 2, 0, -2]$$

(4)  $10^4 \times 50$

resonát je rovnou

$$A^T A p = A^T z \quad p = \underbrace{(A^T A)^{-1}}_{A^+} A^T z$$

$$A^T = \begin{matrix} 10^4 \\ 50 \end{matrix}$$

$$A^T A = \begin{matrix} 10^4 \\ 50 \end{matrix} \text{ Netflix} \quad \begin{matrix} 50 \\ 10^4 \end{matrix} \text{ Spotify} = 50 \begin{matrix} 50 \\ \text{WIS} \end{matrix}$$

matice  $A^T A$  vyjadruje počet vzájemných předložek sloužby i,j  
 (big)

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} \cdot x_{ij} \cdot \begin{vmatrix} x_{11} & \dots & x_{1i-1} & x_{1i+1} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ x_{m1} & \dots & x_{mi-1} & x_{mi+1} & \dots & x_{mn} \end{vmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \\ a & b & c & d \\ b & c & d & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} \phantom{d} & \phantom{d} & \phantom{d} & \phantom{d} \\ \phantom{d} & \phantom{d} & \phantom{d} & \phantom{d} \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} \phantom{d} & \phantom{d} & \phantom{d} & \phantom{d} \\ \phantom{d} & \phantom{d} & \phantom{d} & \phantom{d} \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} \phantom{d} & \phantom{d} & \phantom{d} & \phantom{d} \\ \phantom{d} & \phantom{d} & \phantom{d} & \phantom{d} \end{vmatrix} + d \begin{vmatrix} \phantom{d} & \phantom{d} & \phantom{d} & \phantom{d} \\ \phantom{d} & \phantom{d} & \phantom{d} & \phantom{d} \end{vmatrix}$$

$$\|Ma - b\|^2$$

$$a = (a_0, a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$$

$$A = \boxed{\quad}^{p+1} \quad y = b$$

Příklady z první části vyřešte a odpovědi včetně postupu napište do připravených mezer.

1. (2 b) Najděte vzdálenost bodu  $\mathbf{z} = (2, -1, 0, 0) \in \mathbb{R}^4$  od nadroviny  $\{\mathbf{x}; \mathbf{a}^T \mathbf{x} = b\}$ , kde  $\mathbf{a} = (3, 1, 0, 2)$ ,  $b = 2$ .

$$\text{Můžeme využít např. známého vzorce } \frac{|\mathbf{a}^T \mathbf{z} - b|}{\|\mathbf{a}\|} = \frac{|(3, 1, 0, 2)(2, -1, 0, 0) - 2|}{\|(3, 1, 0, 2)\|} = \frac{3}{\sqrt{14}}.$$

vzdálenost bodu od nadroviny  $\frac{|\mathbf{a}^T \mathbf{z} - b|}{\|\mathbf{a}\|} = \frac{3}{\sqrt{14}}$

$$\mathbf{a}^T \mathbf{z} = [3 \ 1 \ 0 \ 2] \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 5 \quad \|\mathbf{a}\| = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$$

3. Máme 5 pozorování  $(0, 1), (1, 1), (\sqrt{2}, 3), (\sqrt{3}, 3), (2, 4)$  tvaru  $(x_i, y_i)$ . Hledáme regresní funkci  $y = \theta_1 x^2 + \theta_2$ , kde  $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$  jsou neznámé parametry.

- a) (1 bod) Formulujte úlohu maticově jako problém nejmenších čtverců.
- b) (2 body) Vyřešte tento problém.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Hledáme  $\theta \in \mathbb{R}^2$  minimalizující  $\|\mathbf{A}\theta - \mathbf{b}\|^2$ . To je to samé, jako řešit soustavu normálních rovnic  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}\theta = \mathbf{A}^T \mathbf{b}$ , což je soustava

$$\begin{bmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ 12 \end{bmatrix},$$

jejíž jediné řešení je  $\theta_1 = \theta_2 = \frac{4}{5}$ .

4. Řádky matice  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{1000 \times 9}$  reprezentují filmy a sloupce diváky, složky matice  $\mathbf{A}$  jsou čísla 0 nebo 1 podle toho, zda daný divák shlédl daný film.

- a) (1 b) Jakou interpretaci mají složky matice  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ ?
- b) (1 b) Jakou interpretaci mají složky matice  $\mathbf{A} \mathbf{A}^T$ ?
- c) (1.5 b) Pro matici  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  hledáme nejbližší matici hodnosti  $\leq 4$ . Formulujte úlohu maticově jako optimalizační problém a napište (obecně) hodnotu účelové funkce v optimu.
- d) (1.5 b) Jaké bude optimální řešení tohoto problému, pokud víte, že matice  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  má alespoň 5 nulových vlastních čísel?

a) Počet filmů, které viděl divák  $i$  a  $j$ . b) Počet diváků, kteří viděli filmy  $i$  a  $j$ . c) Minimalizujeme  $\|\mathbf{A}^T \mathbf{A} - \mathbf{B}\|^2$  za podmínek  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{9 \times 9}$  a  $\text{rank } \mathbf{B} \leq 4$ . V optimu pro matici  $\mathbf{B}^*$  platí

$$\|\mathbf{A}^T \mathbf{A} - \mathbf{B}^*\|^2 = s_5^2 + \dots + s_9^2 = \lambda_1 + \dots + \lambda_5$$

kde  $s_1 \geq \dots \geq s_9$  jsou singulární čísla matice  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  a  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_9$  jsou vlastní čísla matice  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ . d)  $\mathbf{B}^* = \mathbf{A}^T \mathbf{A}$

V každém z následujících kvízových příkladů je právě jedna odpověď správně. Odpovědi vyznačte do tabulky křížky. Nechcete-li na nějaký příklad odpovědět, sloupec v tabulce ponechte prázdný. Pokud již vyznačený křížek chcete odstranit, políčko s křížkem zcela vyplňte barvou.

**ODPOVĚDI NEVYZNAČENÉ V TABULCE NEBUDOU ZAPOČÍTÁNY.**

(Za každou správnou odpověď je 1 bod.)



	1
a	
b	
c	
d	
e	

### ODPOVĚĎ (a) JE VŽDY SPRÁVNÁ.

1. Nechť  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  je matice taková, že  $\text{rank } \mathbf{A} = n < m$ . Matice  $\mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$

- (a) je singulární
- (b) je regulární
- (c) je ortogonální
- (d) je negativně definitní
- ll (e) nemusí existovat



2. Máme zadánu pozitivně definitní symetrickou matici  $\mathbf{A}$  řádu  $n$ . Platí:

- (a)  $\min\{\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\| = 1\} = \lambda$ , kde  $\lambda$  je nejmenší vlastní číslo matice  $\mathbf{A}$ .
- (b) Nic z uvedeného.
- (c) Optimální řešení úlohy  $\max\{\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$  vždy existuje.
- (d) Kvadratická forma  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$  může nabývat záporných hodnot.
- (e) Každý vlastní vektor odpovídající největšímu vlastnímu číslu matice  $\mathbf{A}$  je řešením úlohy  $\max\{\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$ .

3. Máme ortogonální matice  $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$  a vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ . Označme  $\mathbf{y} = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \cdots \mathbf{A}_k \mathbf{x}$ . Platí:

- (a)  $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\|$ .
- (b) Vektor  $\mathbf{y}$  je nulový.
- (c) Vektory  $\mathbf{y}$  a  $\mathbf{x}$  jsou kolmé.
- (d)  $\|\mathbf{y}\| = 1$ .

ll (e) Neplatí žádné výše uvedené tvrzení.

4. Nechť  $n \geq 2$  a  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  je jednotkový vektor. Ortogonální projektor na podprostor  $\text{span}\{\mathbf{a}\}$

- (a) je matice  $\mathbf{a} \mathbf{a}^T$
  - (b) neexistuje
  - (c) je matice plné hodnosti
  - (d) je symetrická regulární matice
- ll (e) je matice s alespoň jedním nereálným vlastním číslem

5. Pro úlohu nejmenších čtverců  $\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \|\mathbf{y} - \mathbf{A} \mathbf{x}\|^2$ , kde  $\mathbf{A}$  má lineárně nezávislé sloupce, platí:

- (a) Optimální řešení je  $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{y}$ .
- (b) Optimálních řešení může být nekonečně mnoho.
- (c) Hodnota v optimu je vždy 0.
- (d) Úloha nemusí mít optimální řešení.
- (e) Nic z uvedeného.

(3)

pozorování  $(0,1), (1,1), (\sqrt{2}, 3), (\sqrt{3}, 3), (2, 4) \rightarrow (x_i, y_i)$

$$y = \theta_1 x^2 + \theta_2, \quad \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Výhodně nejménších čtvereců:

$$\min \|A\theta - b\|^2 \rightarrow A^T A \theta = A^T b \quad A^T b = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$30\theta_1 + 10\theta_2 = 32$$

$$10\theta_1 + 5\theta_2 = 12$$

$$\left( \begin{array}{cc|c} 30 & 10 & 32 \\ 10 & 5 & 12 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 30 & 10 & 32 \\ 0 & -5 & -4 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left( \begin{array}{cc|c} 30 & 10 & 32 \\ 0 & 5 & 4 \end{array} \right)$$

$$\theta_2 = 4/5$$

$$30\theta_1 + 40/5 = 32$$

$$15\theta_1 + 4 = 16$$

$$15\theta_1 = 12$$

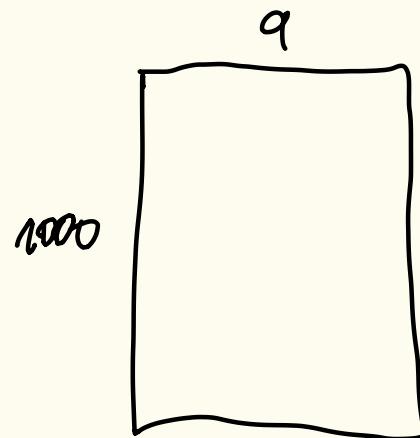
$$\theta_1 = 12/15 = 4/5$$

$$\theta = \begin{bmatrix} 4/5 \\ 4/5 \end{bmatrix}$$

(4)

(f)

1000 filmů  
q divíku  
 $a_{ij} \in \{0, 1\}$



$$A^T A = \begin{matrix} 1000 \\ q \end{matrix} \begin{matrix} 1000 \\ q \end{matrix} = q \begin{matrix} q \\ q \end{matrix} \Rightarrow (*)$$

$b_{ij} =$  počet filmů které viděl i jah divíku i, když divíku j

$$(h) AA^T = \begin{matrix} q \\ 1000 \end{matrix} \begin{matrix} 1000 \\ q \end{matrix} = \begin{matrix} 1000 \\ 1000 \end{matrix}$$

$c_{ij} =$  počet divíku, kteří viděli jah filmu tak film j

$$(c) S_5^2 + S_6^2 + S_7^2 + S_8^2 + S_9^2 = \|A^T A - B^*\|$$

$$\min \|A^T A - B\|^2, \quad \text{rank } B \leq 4 \\ B \in \mathbb{R}^{n \times q} (*)$$

$$(d) A^T A = B^*$$

vzdálenost bodu  
od nuly vlny  $\{x; a^T x = b\}$   
 $|a^T x - b|$  (afinní)

$$\|x\|_1$$

$AV = V \Lambda$   
 $\Lambda = \text{diag}(2, \dots, 2n)$   
Vortag.

$\text{tr}(A+B) = \text{tr}A + \text{tr}B$	$\text{tr}(AT) = \text{tr}A$	$\langle A+B, C \rangle = \langle AC \rangle$
$\text{tr}(\alpha A) = \alpha \text{tr}(A)$	$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$	$\langle B, C \rangle$
$\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B)$	$\langle A, B \rangle = \langle B, A \rangle$	$\langle AB, C \rangle = \langle BC, A \rangle$
$\text{tr}A = \langle I, A \rangle$	$\langle A, B \rangle = \langle A^T, B^T \rangle$	$= \langle A, CB^T \rangle$
	$\langle CA, B \rangle = \alpha \langle A, B \rangle$	$= \langle A, CB^T \rangle$

$X = \text{span}\{ \dots \}$   
nejdejší vektor  $X^+$   
nejdejší hodnota vekt.  $\rightarrow$  vekt. souč.  
 $\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & \dots \\ \vdots & & & \end{vmatrix}$ , rozložit do jednotkových sloupců

LSQ  $\min \|Ax-b\|^2$   
hledané parametry  $y = ax^2 + bx + c$   
pozorování  $(0,1), (1,1), (2,3), (3,3), (4,4)$   
vektory  $(x_i, y_i)$   
rovnice  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 4 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$   
rovnice souběžnou resenou  $\xrightarrow{\text{LSQ}}$   
LSQ prostřednictvím QR  
 $ATAx = A^T b$   
 $(QR)^T QRx = (QR)^T b$   
 $R^T Q^T QRx = R^T B^T b$   
 $R^T R x = R^T Q^T b$   
 $x = \frac{A^T b}{A^T A}$   
 $P = Q R$   
 $Q^T Q = I$   
 $R^T R = R^T R$   
 $R^{-1} = R^T$   
 $R^{-1} R = I$   
 $R^{-1} b = R^T b$   
 $x = R^{-1} b = R^T b$

Afinní podp.  $X = \{1, 2, 3, 4\} + \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$   
užijete A a b součtu  $Ax = b$  je řešitelné

je  $X$ ,  
jm A je hodnota  $\lambda$  (to je  $\lambda \in \text{null } A$ )  
řešení prostřednictvím  $\begin{pmatrix} \lambda & -1 & -1 & -1 \\ 1 & \lambda & -1 & -1 \\ 1 & 1 & \lambda & -1 \\ 1 & 2 & 1 & \lambda \end{pmatrix} = 0$   
(hledaný vektor hodnoty na křížku v X)

$A = [0, 2, 0, -2]$ ,  $b: A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = b$

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\text{rank } A = n < m$ ,  $A(A^T A)^{-1} A^T$  je řešitelné  
ortog. matice zahrnující normu  
A LN sloupců, matice ortog. proj. na null AT

$\text{rank}(AB) \leq \min\{\text{rank } A, \text{rank } B\}$   
jestli A, B ortog. matice, C = A · B je ortog.  
 $n \geq 2$ ,  $C \in \mathbb{R}^n$  ortog. proj. na  $\text{span}\{a\}$ ; je  
symetrická matice  $(CC^T)$   
 $\lambda = 0$  má pouze symetrickou

Matice ortog. projekce na  $X^\perp$   
 $U = \frac{X^\perp}{\|X^\perp\|}$  U matice sestávající  $X^\perp$   
(ortogonalizace)  
potom  $P = UU^T$

Gramm-Schmidt

 $q_1 = a_1$   
 $q_2 = a_2 - (q_1^T a_2) q_1$   
 $q_3 = a_3 - (q_1^T a_3) q_1 - (q_2^T a_3) q_2$   
 $q_i = q_i / \|q_i\|$   
 $q_1, \dots, q_n$  orthonorm.

Matice ortog. proj. na  $X$ :  
 $I - P$  (projektor na  $X^\perp$ )

jednoduchý  $P = A(A^T A)^{-1} A^T = AA^+$   $\frac{1}{2}(A+A^T)$  symetrický

$X = \{(x_1, x_2, x_3, x_4); x_1 = x_4\}; z = (4, 3, 2, 1)$   
nejdejší kolmou proj. z na X a  $X^\perp$   
 $B_x = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ , prostřednictvem hodnoty vektora  
 $X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$   $X^+ = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$  potom projekce na  $X^\perp$   
 $z = x + y$   $x = z - y$   $y = \frac{c x^T}{a^T a} \cdot z = \frac{a^T z}{a^T a} a$

Afinní podp.  $X = \{1, 2, 3, 4\} + \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$   
užijete A a b součtu  $Ax = b$  je řešitelné

$\text{rank}(AB) \leq \min\{\text{rank } A, \text{rank } B\}$   
jestli A, B ortog. matice, C = A · B je ortog.  
 $n \geq 2$ ,  $C \in \mathbb{R}^n$  ortog. proj. na  $\text{span}\{a\}$ ; je  
symetrická matice  $(CC^T)$   
 $\lambda = 0$  má pouze symetrickou

$z \in f(x, y) = a(x-y)^2 + b e^{kx+y} + cx + d$   
hledané  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$   
z náměrůvských  $(x_i, y_i, z_i)$   $i=1 \dots 100$   
 $A_p = Z$ ,  $A = \begin{bmatrix} (x_i - y_i)^2 & e^{kx_i + y_i} & x_i & y_i & 1 \end{bmatrix}$   
 $p = (a, b, c, d)$   
 $Z = (z_1, \dots, z_{100})$  naměrěné hodnoty  
 $\text{řešme } \min \|Ap - Z\|^2 \Rightarrow A^T A p = A^T Z$   
 nebo ALN sloupcem, optimální:  $p = (A^T A)^{-1} A^T Z$   
 $p = A^+ Z$

ortog. proj. je symetrická matice  
 $\{x \in \mathbb{R}^n; g^T x = b\}$   $a \neq 0$ , je affiní prostor dim  $n-1$   
 Symetrická matice A: rovnice  $\lambda \leq x^T Ax + f x$ ,  $\|x\|=1$   
 čísla  $\min \|y - Ax\|^2$  má jedno jedno řešení,  
 pokud A LN sloupců, projekce jeho optimum