Optimalizace **Zkouškový test** 26. 5. 2023

Příjmení a jméno: _____

Úloha	1	2	3	4	*Celkem*
Maximum	10	10	10	10	40
Počet bodů					

1. Rozhodněte o pravdivosti tvrzení (ano/ne) a každou odpověď zdůvodněte.
   (a) (2 b) Funkce $f(x,y) = e^x + |y| - 2$ je konvexní.
   (b) (2 b) Množina $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \le x \le 1, x^2 \le y \le 1, |x| \le y\}$ je konvexní polyedr.
   (c) (2 b) Funkce $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + |x| + |y|$ má lokální minimum, které není globální.
   (d) (2 b) Konvexní polyedr $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \ge 5, 4x + y \le 4, x, y \ge 0\}$ nemá vrchol.
   (e) (2 b) Každý bod uzavřeného intervalu $[-1,1]$ je regulárním bodem funkce $f(x) = (x-1)^{10}$.

Řešení:

(a) Ano, je to součet konvexních funkcí.

(b) Ano, kvadratická podmínka je redundantní.

(c) Ne, je to norma, tedy konvexní funkce.

(d) Ano, nemá, protože je prázdný.

(e) Ne. V bodě 1 má funkce nulovou derivaci.

2. (10 b) Matici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$ napište ve tvaru SVD $\mathbf{A} = \sigma_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^T + \sigma_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{v}_2^T$.

Řešení:

Matice

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 81 & -27 \\ -27 & 9 \end{bmatrix}$$

má vlastní čísla 0 a 90. První vlastní číslo dokonce snadno uhodneme, neboť $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ má hodnost 1. Charakteristický polynom je $\lambda^2 - 90\lambda$. Singulární čísla jsou $\sigma_1 = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$ a $\sigma_2 = 0$. Tedy SVD rozklad je tvaru $\mathbf{A} = 3\sqrt{10}\mathbf{u}\mathbf{v}^T$, kde $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ je levý/pravý singulární vektor matice $\mathbf{A}$. Nejprve spočteme $\mathbf{v}$, což je vlastní vektor matice $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ příslušná vlastnímu číslu 90. Tedy řešíme homogenní soustavu s maticí

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} - 90\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -9 & -27 \\ -27 & -81 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$$

Její obecné řešení je $(3t, -t)$. Tomu odpovídá jednotkový vlastní vektor $\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{10}}(3, -1)$. Levý singulární vektor dopočteme jako

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sigma_1}\mathbf{A}\mathbf{v} = \frac{1}{30}\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}(3, -1)^T = \frac{1}{30}(-10, 20, 20)^T.$$

Tedy našli jsme SVD

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} = \sigma_1 \mathbf{u}\mathbf{v}^T.$$

3. Firma vyrábí dva druhy produktů. První se prodává za 40 a druhý za 60. K výrobě každého výrobku se používají tři vstupní suroviny, kterých je k dispozici 70, 40 a 90 jednotek. K výrobě prvního produktu je potřeba 1 jednotka druhé i třetí suroviny a 2 jednotky první suroviny, druhý produkt potřebuje po jedné jednotce první a druhé suroviny a 3 jednotky třetí suroviny. Firma chce maximalizovat tržby z vyráběných produktů.
   (a) (2 b) Formulujte optimalizační úlohu (Podmínky celočíselnosti zanedbejte).
   (b) (5 b) Spočtěte její optimální řešení.
   (c) (3 b) Formulujte podmínky komplementarity pro úlohu z bodu (a).

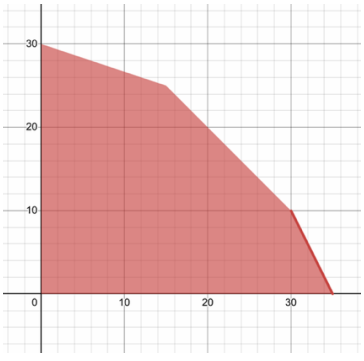
Řešení:

(a) Jedná se o lineární program $\max 40x + 60y$ z.p. $2x + y \leq 70$, $x + y \leq 40$, $x + 3y \leq 90$, $x, y \geq 0$.

(b) Přípustná řešení tvoří trojúhelník, jehož vrcholy jsou $(0, 30), (15, 25), (30, 10), (35, 0), (0, 0)$. Ty spočítáme řešením odpovídajících soustav lin. rovnic. Porovnáním funkčních hodnot zjistíme, že optimum je v bodě $(15, 25)$.

(c) Podmínky komplementarity: v optimu primáru $\mathbf{x}$ a duálu $\mathbf{z}$ musí platit $2x+y = 70$ nebo $z_1 = 0$, $x+y = 40$ nebo $z_2 = 0$, $x+3y = 90$ nebo $z_3 = 0$ a dále $x = 0$ nebo $2z_1+z_2+z_3 = 40$, $y = 0$ nebo $z_1 + z_2 + 3z_3 = 60$.

4. Uvažujme funkci $f(x, y, z) = 3x^2 - y^2 + 3xy + z^2$.
   (a) (2 b) Jaká je směrová derivace funkce f ve směru $(0, 0, 1)$?
   (b) (4 b) Napište Taylorův polynom prvního řádu kolem bodu $(1, 1, 0)$. Pokud budete používat nějaké derivace, rozepište je, nepoužívejte f' či f''.
   (c) (2 b) Napište obecnou iteraci gradientní metody použitou na minimalizaci funkce f.
   (d) (2 b) Napište obecnou iteraci Newtonovy metody použitou na minimalizaci funkce f. Zúčastněné matice nemusíte případně invertovat.



Řešení:

(a) Směrová derivace funkce f ve směru $(0,0,1)$ je parciální derivace podle proměnné z, tedy $2z$.

(b) Derivace funkce f je $(6x+3y, -2y+3x, 2z)$. Vzhledem k tomu, že $f(1,1,0)=5$ a $f'(1,1,0)=(9,1,0)$, má Taylorův polynom tvar

$$T_1(x,y,z) = f(1,1,0) + f'(1,1,0)((x,y,z)-(1,1,0)) = -5+9x+y.$$

(c) $(x_{k+1}, y_{k+1}, z_{k+1}) = (x_k, y_k, z_k) - \alpha_k \nabla f(x_k, y_k, z_k)$, což můžeme psát jako

$$((1-6\alpha_k)x_k - 3\alpha_k y_k, -3\alpha_k x_k + (1+2\alpha_k)y_k, (1-2\alpha_k)z_k)$$

(d) Hessova matice:

$$f''(x,y,z) = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$(x_{k+1}, y_{k+1}, z_{k+1}) = (x_k, y_k, z_k) - \alpha_k f''(x_k, y_k, z_k)_k^{-1} f'(x_k, y_k, z_k)^T$

Příjmení a jméno: _____

Úloha	1	2	3	4	*Celkem*
Maximum	10	10	10	10	40
Počet bodů					

1. Rozhodněte o pravdivosti tvrzení (ano/ne) a každou odpověď zdůvodněte.
   (a) (2 b) Pro matici $\mathbf{A}$ s lin. nezávislými sloupci je každé vlastní číslo matice $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ kladné.
   (b) (2 b) Matice $\begin{bmatrix} -6 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ má všechna singulární čísla kladná.
   (c) (2 b) Pro negativně definitní matici $\mathbf{A}$ je množina $\{(\mathbf{x}, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \leq y\}$ konvexní.
   (d) (2 b) Pro matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{10\times 9000}$ je následující úloha konvexní: $\min \sum_{j=1}^{7} \mathbf{x}_j^T\mathbf{A}\mathbf{A}^T\mathbf{x}_j$ za podmínky, že vektory $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_7 \in \mathbb{R}^{10}$ tvoří ortonormální množinu.
   (e) (2 b) Pro zadané $\alpha > 0$, matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ je následující úloha konvexní: $\min \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2$ za podmínek $\|\mathbf{x}\|_1 \leq \alpha$, kde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Řešení:

(a) Ano, protože $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ je regulární a pozitivně semidefinitní, tedy nutně pozitivně definitní, a tak má jen kladná vlastní čísla.

(b) Ne, protože snadno nahlédneme, že $\mathbf{A}$ má hodnost 2 (první řádek je násobkem druhého).

(c) Ne. Je to epigraf konkávní funkce (např. plocha nad parabolou $-x^2$), což je typicky nekonvexní množina.

(d) Ne. Je to vlastně instance úlohy PCA. Účelová funkce je konvexní, ale netriviální konvexní kombinace dvou jednotkových vektorů nemá jednotkovu délku.

(e) Ano. Je to úloha nejmenších čtverců s konvexními omezeními, protože $\|\mathbf{x}\|_1 \leq \alpha$ definuje subkonturu konvexní funkce.

2. Je dána matice $\mathbf{A}$ a vektor $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = (1, 1, 1).$$

   Najděte kolmé projekce vektoru $\mathbf{x}$ na
   (a) (2 b) $\operatorname{span}\{(1, 1, 2)\}$,
   (b) (2 b) $\operatorname{rng}\mathbf{A}$,
   (c) (2 b) $\operatorname{null}\mathbf{A}$,
   (d) (2 b) $\operatorname{rng}\mathbf{A}^T$,

(e) (2 b) $\operatorname{null} \mathbf{A}^T$.

Řešení:

(a) Kolmá projekce je $2/3\,(1,1,2)$.

(b) Projekci spočítáme například jako $\mathbf{x}$ minus řešení (e), vychází $1/5\,(3,6,5)$.

(c) $\operatorname{null} \mathbf{A} = \operatorname{span}\{(1,1,-1)\}$ a kolmá projekce je $1/3\,(1,1,-1)$.

(d) Projekci spočítáme například jako $\mathbf{x}$ minus řešení (c), vychází $2/3\,(1,1,2)$.

(e) $\operatorname{null} \mathbf{A}^T = \operatorname{span}\{(2,-1,0)\}$ a kolmá projekce je $1/5\,(2,-1,0)$.

3. (10 b) Najděte globální extrémy funkce

$$f(x,y) = x^2 + 2\,x + y^2 + 2\,y + 3$$

za podmínek

$$x^2 + y^2 \le 4\,,$$
$$3\,x + 2\,y \le -6\,.$$

Znázorněte obor, na kterém extrémy hledáme, a nezapomeňte zformulovat závěr, k němuž jste dospěli.

Řešení:

Všechny funkce v úloze jsou všude diferencovatelné.

1. Volné extrémy dostaneme řešením soustavy

$$f'(x,y) = (2(x+1), 2(y+1)) = \mathbf{0}\,,$$

$x = y = -1$, $f(-1,-1) = 1$. Funkce f je ryze konvexní, takže $(-1,-1)$ je její jediné volné minimum, ale nesplňuje druhou omezující podmínku.

2. Extrémy vázané podmínkou $g_1(x,y) = 0$, kde $g_1(x,y) = x^2 + y^2 - 4$, dostaneme řešením soustavy

$$f'(x,y) + \lambda_1\, g_1'(x,y) = (2(x+1) + 2\,\lambda_1\, x, 2(y+1) + 2\,\lambda_1\, y) = \mathbf{0}\,,$$

$x = y = \frac{-1}{1+\lambda_1}$, dosazením do omezující podmínky $x^2 + y^2 - 4 = 0$ dostaneme $x = y = -\sqrt{2}$ (druhé řešení $x = y = \sqrt{2}$ je mimo obor), $f(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 7 - 4\sqrt{2} \doteq 1.343$. Je to lokální minimum.

3. Extrémy vázané podmínkou $g_2(x,y) = 0$, kde $g_2(x,y) = 3\,x + 2\,y + 6$, dostaneme řešením soustavy

$$f'(x,y) + \lambda_2\, g_2'(x,y) = (2(x+1) + 3\,\lambda_2, 2(y+1) + 2\,\lambda_2) = \mathbf{0}\,,$$

$x = -1 - \frac{3}{2}\lambda$, $y = -1 - \lambda$, dosazením do omezující podmínky $3\,x + 2\,y + 6 = 0$ dostaneme $\lambda = \frac{2}{13}$, $x = -\frac{16}{13}$, $y = -\frac{15}{13}$, $f(-\frac{16}{13}, -\frac{15}{13}) = \frac{14}{13} \doteq 1.077$. Je to lokální minimum (minimum ostře konvexní funkce na konvexní množině – úsečce).

4. Rovnosti v obou omezujících podmínkách nastávají současně ve dvou bodech, které dostaneme řešením soustavy

$$x^2 + y^2 = 4\,,$$
$$3\,x + 2\,y = -6\,.$$

Z druhé rovnice vyjádříme $y = -3 - \frac{3}{2}\,x$ a dosazením do první dostaneme kvadratickou rovnici

$$\frac{13}{4}\,x^2 + 9\,x + 5 = 0$$

s řešeními
$x_1 = -2$, $y_1 = 0$, $f(x_1, y_1) = 3$,
$x_2 = -\frac{10}{13}$, $y_2 = -\frac{24}{13}$, $f(x_2, y_2) = \frac{23}{13} \doteq 1.769$.
Tyto body jsou lokální maxima, neboť relevantní část Hessovy matice Lagrangeovy funkce je pro $\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} - 1$

$$\begin{bmatrix} 2\,(1+\lambda_1) & 0 & \dots \\ 0 & 2\,(1+\lambda_1) & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix},$$

tedy pozitivně definitní v prvních dvou proměnných (x, y).

Závěr: V $(\frac{16}{13}, -\frac{15}{13})$ (z části 3) je jediné globální minimum (jedná se o minimum ostře konvexní funkce na konvexním oboru), v $(-2, 0)$ (z části 4) je jediné globální maximum.

4. Fitness centrum nakupuje oříšky, banány a mléko do energetického koktejlu. Jednotkové ceny oříšků, banánů a mléka jsou $(3, 1, 4)$, cílem je minimalizace nákladů na jejich pořízení. Zohlednit se musí minimální požadavky na živiny tří různých druhů, které jsou vyjádřeny vektorem $(3, 2, 4)$. Oříšky obsahují jednotku první i druhé živiny a dvě jednotky třetí živiny, banány pouze dvě jednotky první živiny a tři jednotky třetí živiny, a mléko obsahuje pouze dvě jednotky druhé živiny a jednotku třetí živiny.

(a) (3 b) Formulujte úlohu jako lineární program.

(b) (3 b) Napište duální úlohu.

(c) (2 b) Optimální řešení duálu je $(\frac{1}{2}, 2, 0)$. Stanovte optimální řešení primární úlohy bez jejího řešení.

(d) (2 b) Je optimální řešení duálu vrcholem polyedru? Vysvětlete přesně, proč ano/ne.

Řešení:

(a) $\min 3x_1 + x_2 + 4x_3$ z.p. $x_1 + 2x_2 \geq 3$, $x_1 + 2x_3 \geq 2$, $2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 4$, kde $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.

(b) $\max 3y_1 + 2y_2 + 4y_3$ z.p. $y_1 + y_2 + 2y_3 \leq 3$, $2y_1 + 3y_3 \leq 1$, $2y_2 + y_3 \leq 4$, kde $y_1, y_2, y_3 \geq 0$.

(c) Podle věty o slabé dualitě stačí uhodnout přípustný vektor $\mathbf{x}^*$ splňující

$$3x_1^* + x_2^* + 4x_3^* = 3 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 0 = \frac{11}{2}.$$

Snadno nalezneme $\mathbf{x}^* = (0, \frac{3}{2}, 1)$.

(d) Ano, je to řešení soustavy $y_3 = 0$, $2y_1 + 3y_3 = 1$, $2y_2 + y_3 = 4$, jejíž matice má lin. nezávislé sloupce.

Příjmení a jméno: _____

Úloha	1	2	3	4	*Celkem*
Maximum	10	10	10	10	40
Počet bodů					

1. Rozhodněte o pravdivosti tvrzení (ano/ne) a každou odpověď zdůvodněte.
   (a) (2 b) Funkce $f(x_1, x_2, x_3) = |x_2 - x_3| + |x_1|$ je konvexní.
   (b) (2 b) Průnik epigrafů funkcí $f(x) = \mathrm{e}^x$ a $g(x) = x$ je konvexní množina.
   (c) (2 b) Z vlastních vektorů matice $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ lze vždy sestavit ortonormální bázi prostoru $\mathbb{R}^m$, kde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$.
   (d) (2 b) Matice $\mathbf{u}\mathbf{u}^T$ má hodnost 1, kde $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{100}$ je nenulový vektor.
   (e) (2 b) Pro zadanou matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ nemusí mít úloha $\min \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2$ globální minimum.

Řešení:

(a) Ano, je to součet dvou konvexních funkcí, z nichž ta první je konvexní, protože absolutní hodnota je konvexní funkce a její argument je zde lineární funkce.

(b) Ano, obě množiny jsou konvexní a jejich průnik tedy také.

(c) Ano, to zaručuje věta o spektrálním rozkladu pro reálnou symetrickou matici $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$.

(d) Ano. Ta matice je dyáda, jejíž každý řádek je jen násobkem $\mathbf{u}^T$ a ne všechny takto vzniklé řádky jsou nulové.

(e) Ne. Je to úloha nejmenších čtverců a ta je konvexní.

2. Máme množinu $X = \{(x, y, z) \mid x = t, y = 2t, z = 1 - t,\ t \in \mathbb{R}\}$.
   (a) (5 b) Najděte nějakou matici $\mathbf{A}$ a nějaký vektor $\mathbf{b}$ tak, aby platilo $X = \{\mathbf{u} \mid \mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b}\}$.
   (b) (5 b) Jaká je vzdálenost bodu $(1, 1, 1)$ od množiny X? Uveďte dva rozdílné způsoby výpočtu.

Řešení:

(a) X je přímka $\mathrm{span}\{(1, 2, -1)\} + (0, 0, 1)$. Řádky matice $\mathbf{A}$ musejí být kolmé na směrový vektor přímky, leží tedy v null $[1\ 2\ -1]$, máme například $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. Vektor $\mathbf{b}$ dopočítáme z faktu, že $(0, 0, 1)$ leží v X, tedy $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(b) Na vzdálenost bodu $\mathbf{v}$ od afinního prostoru $\{\mathbf{u} \mid \mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b}\}$ lze uplatnit vzoreček $\sqrt{(\mathbf{A}\mathbf{v} - \mathbf{b})^T (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} (\mathbf{A}\mathbf{v} - \mathbf{b})}$, nebo použijeme vzorec pro vzdálenost přímky $A + \mathbf{s}\,t$ od

bodu B: $\frac{\|(B-A)\times\mathbf{s}\|}{\|\mathbf{s}\|}$, nebo provedeme projekci posunutého bodu $B-A$ na přímku $\operatorname{span}\{\mathbf{s}\}$ a následně určíme vzdálenost této projekce od bodu $B-A$. Ve všech případech vyjde vzdálenost $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Další alternativa je vyřešit optimalizační úlohu hledání minima kvadrátu vzdálenosti bodu na přímce $(t, 2t, 1-t)$ od bodu $(1,1,1)$. Minimum nastává pro $t=\frac{1}{2}$, průmět tedy je $(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})$ a vzdálenost je $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

3. Hledáme lokální minimum funkce

$$f(x,y) = \frac{3}{4}\,x^3 + 4\,x^2 + 12\,x\,y + 12\,y^2 - 28\,x - 48\,y + 52\,.$$

Počáteční odhad je $(x_0, y_0) = (0, 2)$.

(a) (4 b) Proveďte jeden krok gradientní metodou s optimální délkou kroku a vypočtěte funkční hodnotu v novém bodě.

(b) (4 b) Proveďte jeden krok Newtonovou metodou a vypočtěte funkční hodnotu v novém bodě.

(c) (2 b) Daná funkce má lokální minimum. Vyjádřete se k tomu, zda ho může gradientní metoda nalézt (z nějakého počátečního bodu) a zda to může být globální minimum.

Řešení:

Vše jsou polynomy, mají všechny derivace spojité.

$$\begin{aligned}
f'(x,y) &= (\tfrac{9}{4}\,x^2 + 8\,x + 12\,y - 28, 12\,x + 24\,y - 48)\,,\\
f''(x,y) &= \begin{bmatrix} \frac{9}{2}\,x + 8 & 12 \\ 12 & 24 \end{bmatrix}\,,\\
f(x_0,y_0) &= 4\,,\\
f'(x_0,y_0) &= (-4, 0)\,,\\
f''(x_0,y_0) &= \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 12 & 24 \end{bmatrix}\,,\\
(f''(x_0,y_0))^{-1} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}\,.
\end{aligned}$$

1. (4 b.) Gradientní metoda:

$$\begin{aligned}
(x_1,y_1) &= (x_0,y_0) - \alpha\, f'(x_0,y_0) = (4\alpha, 2)\,,\\
\varphi(\alpha) &= f(x_1,y_1) = 48\,\alpha^3 + 64\,\alpha^2 - 16\,\alpha + 4\,,\\
\varphi'(\alpha) &= 144\,\alpha^2 + 128\,\alpha - 16\,.
\end{aligned}$$

Podmínka $\varphi'(\alpha) = 0$ je ekvivalentní

$$9\,\alpha^2 + 8\,\alpha - 1 = 0\,.$$

Zajímá nás jen kladné řešení (v sestupném směru),

$$\alpha = \frac{-8 + \sqrt{8^2 + 4 \cdot 9}}{2 \cdot 9} = \frac{1}{9}\,,$$
$$(x_1, y_1) = \left(\frac{4}{9}, 2\right),$$
$$f(x_1, y_1) = \frac{748}{243} \doteq 3.078\,.$$

2. (4 b.) Newtonova metoda (krok značíme stejně):

$$(x_1, y_1) = (x_0, y_0) - f''(x_0, y_0)^{-1}\, f'(x_0, y_0)^{\mathsf{T}} = (0, 2) - (-2, 1) = (2, 1)\,,$$
$$f(x_1, y_1) = 6\,.$$

Výsledek Newtonovy metody může být zklamáním. Zkusíme ho vysvětlit. Funkce f bez prvního členu $\frac{3}{4}\,x^3$ je pozitivně definitní kvadratická forma $(x-2)^2+3\,(x+2\,y-4)^2$, která má globální minimum 0 v bodě $(2, 1)$. To by Newtonova metoda našla v jednom kroku. Člen $\frac{3}{4}\,x^3$ situaci změnil, ale nezměnil postup, neboť má v počátečním bodě nulouvou první i druhou derivaci.

3. (2 b.) Lokální minimum lze nalézt gradientní metodou, bude-li vhodně volena velikost kroku. Nemůže to být globální minimum, protože pro velké záporné hodnoty x dovolí člen s nejvyšší mocninou, $\frac{3}{4}\,x^3$, libovolně nízkou hodnotu funkce f.

4. Minimalizujeme funkci $f(x_1, x_2) = 2x_1 - 2x_2$ za podmínek $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_1 + x_2 \leq 8$, $4x_1 + x_2 \leq 20$, $x_2 \leq 6$.
   (a) (4 b) Vyřešte tuto úlohu a zdůvodněte postup.
   (b) (3 b) Formulujte duální úlohu.
   (c) (3 b) Vyřešte duální úlohu pomocí podmínek komplementarity.

Řešení:

Omezení tvoří konvexní polyedr, který je konvexním obalem bodů $(0, 0)$, $(0, 6)$, $(2, 6)$, $(4, 4)$, $(5, 0)$. O tom se lze předsvědčit náčrtkem nebo řešením odpovídajích soustav lineárních rovnic. Minimální hodnota účelové funkce -12 nastává v $(0, 6)$. Duální úloha: maximalizuj $-8y_1 - 20y_2 - 6y_3$ za podmínek $y_1, y_2, y_3 \geq 0$, $-y_1 - 4y_2 \leq 2$, $-y_1 - y_2 - y_3 \leq -2$. Jelikož nejsou v optimu první dvě primární omezení těsná, maximum duální úlohy musí nastat v bodě $(0, 0, y_3)$. Pomocí druhého omezní duálu pak zjistíme, že $y_3 = 2$.

Příjmení a jméno: _____

Úloha	1	2	3	4	*Celkem*
Maximum	10	10	10	10	40
Počet bodů					

1. Rozhodněte o pravdivosti tvrzení (ano/ne) a každou odpověď zdůvodněte.
   (a) (2 b) Funkce $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$, kde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, má globální minimum v bodě $\mathbf{0}$ pro libovolnou matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
   (b) (2 b) Množina $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\mathbf{x}\|_1 = 1,\ x_1^2 + x_2^2 - 2x_2 + 1 \le \frac{1}{4}\ \}$ je konvexní.
   (c) (2 b) Funkce $f(\mathbf{x}) = \max\{\|\mathbf{x}\|_\infty, 2\}$ je konvexní.
   (d) (2 b) Konvexní obal bodů $(0,0), (0,1), (2,0)$ je obsažen v množině $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\mathbf{x}\|_\infty \le 2\}$.
   (e) (2 b) Problém $\min\{2x_1 - x_3 \mid \|\mathbf{x}\|_2 \le 3,\ x_1 \ge 0,\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4\}$ je úloha lineárního programování.

Řešení:

(a) Ne. Protipříklad: $f(x) = -x^2$.

(b) Ne. Je to sjednocení dvou různých úseček (stačí náčrtek).

(c) Ano, je to maximum dvou konvexních funkcí.

(d) Ano, každý bod toho trojúhelníka má všechny souřadnice ≤ 2.

(e) Ne. Omezení jsou nelineární, množina přípustných řešení není polyedr.

2. Jsou dány dvě mimoběžky v $\mathbb{R}^n$, $n \ge 3$, každá je zadána bodem, kterým prochází, a směrovým vektorem. Najděte jejich vzdálenost metodou nejmenších čtverců.
   (a) (5 b) Zformulujte problém jako optimalizační úlohu a sestavte příslušnou soustavu normálních rovnic umožňující vyřešit problém.
   (b) (5 b) Vyřešte úlohu pro případ dvou mimoběžných přímek v $\mathbb{R}^3$, jedna z nich je osa x_1 a druhá prochází body $(0,1,0)$ a $(0,0,2)$.

Řešení:

(a) Nechť jsou přímky popsány jako $\{\mathbf{a}_1 + t_1\mathbf{s}_1 \,|\, t_1 \in \mathbb{R}\}$ a $\{\mathbf{a}_2 + t_2\mathbf{s}_2 \,|\, t_2 \in \mathbb{R}\}$. Hledá se minimum $\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|$ za podmínek, že $\mathbf{x}_1 = \mathbf{a}_1 + t_1\mathbf{s}_1$ a $\mathbf{x}_2 = \mathbf{a}_2 + t_1\mathbf{s}_2$. Řešíme přeurčenou soustavu s n rovnicemi a dvěma proměnnými t_1, t_2: $\mathbf{a}_1 + t_1\mathbf{s}_1 = \mathbf{a}_2 + t_2\mathbf{s}_2$. Soustavu lze zapsat maticově $\begin{bmatrix}\mathbf{s}_1 & -\mathbf{s}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t_1\\t_2\end{bmatrix} = [\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1]$. Soustavu normálních rovnic dostaneme po vynásobení maticí $\begin{bmatrix}\mathbf{s}_1^T\\-\mathbf{s}_2^T\end{bmatrix}$ zleva:

$$\begin{bmatrix}\|\mathbf{s}_1\|^2 & -\mathbf{s}_1^T\mathbf{s}_2\\ -\mathbf{s}_1^T\mathbf{s}_2 & \|\mathbf{s}_2\|^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t_1\\t_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{s}_1^T(\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1)\\ -\mathbf{s}_2^T(\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1)\end{bmatrix}.$$

(b) Volíme $\mathbf{a}_1 = (0,0,0)$, $\mathbf{s}_1 = (1,0,0)$, $\mathbf{a}_2 = (0,1,0)$, $\mathbf{s}_2 = (0,-1,2)$ a řešíme soustavu normálních rovnic uvedenou obecně v (a). Máme soustavu:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

takže $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{1}{5}$ a vzájemně nejbližší body na mimoběžkách jsou $(0,0,0)$, $(0, \frac{4}{5}, \frac{2}{5})$. Jejich vzdálenost je $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

3. (10 b) Najděte všechny lokální i globální extrémy funkce $f(x,y) = x\,y - 3\,x$ za podmínky $x^2 + y^2 \leq 9$. Funkci f v nich vyhodnoťte a řekněte, o jaký typ extrému se jedná.

Řešení:

Vše jsou polynomy, mají všechny derivace spojité.

$$f'(x,y) = (y-3, x)\,,$$
$$f''(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

A. Volné extrémy dostaneme řešením soustavy

$$f'(x,y) = (y-3, x) = \mathbf{0}\,,$$

$x = 0$, $y = 3$, $f(0,3) = 0$, ale

$$f''(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(pro všechna x, y), což je negativně semidefinitní matice, pro $\varepsilon \neq 0$

$$f(\varepsilon, 3+\varepsilon) = \varepsilon^2 > 0\,,$$
$$f(\varepsilon, 3-\varepsilon) = -\varepsilon^2 < 0\,,$$

takže $(0,3)$ je sedlový bod a žádný extrém. Volný extrém neexistuje.

B. Extrémy vázané podmínkou $g(x,y) = 0$, kde $g(x,y) = x^2 + y^2 - 9$, dostaneme jako stacionární body Lagrangeovy funkce $L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\, g(x,y)$, tj. řešením soustavy

$$f'(x,y) + \lambda\, g'(x,y) = (y - 3 + 2\,\lambda\, x, x + 2\,\lambda\, y) = \mathbf{0}\,,$$

tj.

$$2\,\lambda\, x + y = 3\,,$$
$$x + 2\,\lambda\, y = 0\,.$$

Součet a rozdíl těchto rovnic dá

$$x + y = \frac{3}{2\,\lambda + 1}\,,$$
$$x - y = \frac{3}{2\,\lambda - 1}\,.$$

(Pokud by jmenovatel byl nulový, řešení neexistuje.) Součet a rozdíl těchto rovnic dá

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2\,\lambda + 1} + \frac{3}{2\,\lambda - 1}\right) = \frac{6\,\lambda}{4\,\lambda^2 - 1}\,,$$
$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2\,\lambda + 1} - \frac{3}{2\,\lambda - 1}\right) = \frac{-3}{4\,\lambda^2 - 1}\,.$$

Dosazením do omezující podmínky $x^2 + y^2 - 9 = 0$ dostaneme

$$\frac{-144\,\lambda^4 + 108\,\lambda^2}{(4\,\lambda^2 - 1)^2} = 0\,.$$

Čitatel je $36\,\lambda^2\,(-4\,\lambda^2 + 3)$ a je nulový pro $\lambda \in \left\{0, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$. Tomu odpovídají následující body:

1. $\lambda = 0$, $x = 0$, $y = 3$; $f(0, 3) = 0$. Není extrém.
2. $\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2} \doteq 0.866$, $x = 3\,\lambda = \frac{3}{2}\sqrt{3} \doteq 2.598$, $y = \frac{-3}{2}$; $f(\frac{3}{2}\sqrt{3}, \frac{-3}{2}) = -\frac{27}{4}\sqrt{3}$. Je to globální minimum.
3. $\lambda = -\frac{\sqrt{3}}{2} \doteq -0.866$, $x = 3\,\lambda = -\frac{3}{2}\sqrt{3} \doteq -2.598$, $y = \frac{-3}{2}$; $f(-\frac{3}{2}\sqrt{3}, \frac{-3}{2}) = \frac{27}{4}\sqrt{3}$. Je to globální maximum.

Zdůvodnění: Relevantní část Hessovy matice Lagrangeovy funkce

$$\begin{bmatrix} 2\,\lambda & 1 & \dots \\ 1 & 2\,\lambda & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix},$$

je pro $\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2}$ pozitivně definitní a pro $\lambda = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ negativně definitní v prvních dvou proměnných (x, y). Pro $\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2}$ je negativně semidefinitní, což nedává rozhodnutí. Ale např. derivace kritéria podél hranice množiny (kružnice) je spojitá, tedy nemůže měnit znaménko jinde než ve stacionárních bodech a mezi nimi je monotónní.

Závěr: V bodě $(\frac{3}{2}\sqrt{3}, \frac{-3}{2})$ je globální minimum, v bodě $(-\frac{3}{2}\sqrt{3}, \frac{-3}{2})$ je globální maximum. Jiné extrémy (ani lokální) neexistují.

4. Uvažujeme matici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

   (a) (1 b) Bez počítání zdůvodněte, proč má matice $\mathbf{A}$ právě jedno singulární číslo nulové.

   (b) (3 b) Spočtěte všechna singulární čísla matice $\mathbf{A}$.

   (c) (3 b) Stanovte levé a pravé singulární vektory matice $\mathbf{A}$.

   (d) (3 b) Vyřešte úlohu $\min \{\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|^2 \mid \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{4\times 4}, \operatorname{rank} \mathbf{B} \leq 2\}$.

Řešení:

(a) Matice řádu 4 má hodnost 3, tedy má právě 3 kladná singulární čísla a jedno nulové.

(b) Dostaneme

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

Tedy singulární čísla jsou $s_1 = 3, s_2 = 2, s_3 = 1, s_4 = 0$.

(c) Levé singulární vektory jsou vlastní vektory matice $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$, snadno je nalezneme z definice. Rovnici

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^T\mathbf{u} = 9\mathbf{u}$$

řeší např. $\mathbf{u}_1 = (0, 0, 0, 1)$. Dále $\mathbf{u}_2 = (0, 0, 1, 0)$, $\mathbf{u}_3 = (0, 1, 0, 0)$ a $\mathbf{u}_4 = (1, 0, 0, 0)$. Analogicky stanovíme pravé singulární vektory: $\mathbf{v}_1 = (0, 0, 1, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 0, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (1, 0, 0, 0)$, $\mathbf{v}_4 = (0, 0, 0, 1)$.

(d) Optimální řešení (Eckart-Young) je

$$\mathbf{B}^* = s_1\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1^T + s_2\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$