Ukázka písemného testu z B4B01JAG

Příklad	Body
1	
2	
3	
4	
Σ	

Odpovídejte celou větou (na každou otázku) a každé své tvrzení zdůvodněte.

---

1. [Max. zisk: 25 bodů] Uvažujme abecedu $\Sigma = \{a, b\}$. Jazyk L_1 nad Σ se skládá ze všech slov, která obsahují podslovo aba a neobsahují podslovo aa. Jazyk L_2 je přijímán ε-NFA daným tabulkou:

		ε	a	b
$\to$	1	$\{2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
	2	$\emptyset$	$\{3\}$	$\{2\}$
	3	$\{4\}$	$\emptyset$	$\{1\}$
$\to$	4	$\emptyset$	$\{5\}$	$\{4\}$
$\leftarrow$	5	$\emptyset$	$\{5\}$	$\emptyset$

   (a) [Max. zisk: 9 bodů] Sestrojte konečný redukovaný deterministický automat M_1, který přijímá jazyk L_1. Fakt, že M_1 přijímá L_1, zdůvodněte.

   (b) [Max. zisk: 8 bodů] Sestrojte konečný redukovaný deterministický automat M_2, který přijímá jazyk L_2. Zdůvodněte.

   (c) [Max. zisk: 4 body] Napište regulární výrazy $\mathbf{r_1}$ a $\mathbf{r_2}$, které reprezentují jazyky L_1 a L_2.

   (d) [Max. zisk: 4 body] Rozhodněte, zda platí $\overline{L_1} \subseteq L_2$ a / nebo $l_2 \subseteq \overline{L_1}$ ($\overline{L_1}$ je doplněk jazyka L_1).

2. [Max. zisk: 23 bodů] Je dána bezkontextová gramatika $\mathcal{G} = (N, \Sigma, S, P)$, kde $N = \{S, A, B, C, D\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a P je dáno

$$
\begin{aligned}
S &\to ADA \,|\, CB \\
A &\to ACD \,|\, BaD \,|\, aD \\
B &\to CAB \,|\, DB \\
C &\to CS \,|\, b \,|\, \varepsilon \\
D &\to aA \,|\, bB \,|\, CC
\end{aligned}
$$

   (a) [Max. zisk: 4 body] Ke gramatice $\mathcal{G}$ najděte nevypouštěcí redukovanou gramatiku $\mathcal{G}_1$. Kroky redukce popište.

   (b) [Max. zisk: 5 bodů] Ke gramatice $\mathcal{G}_\infty$ najděte gramatiku $\mathcal{G}_2$ v Chomského normálním tvaru, která generuje stejný jazyk jako gramatika $\mathcal{G}_\infty$. Jednotlivé kroky popište, gramatiku v Chomského normálním tvaru definujte.

   (c) [Max. zisk: 8 bodů] Pomocí matematické indukce dokažte, že v gramatice $\mathcal{G}$ platí $A \Rightarrow_{\mathcal{G}}^{\star} (aba)^i A$ pro každé $i \geq 0$. Toho využijte k důkazu, že slovo $(aba)^i ab(aba)^j a$ je generováno gramatikou $\mathcal{G}$ pro každé $i, j \geq 0$. (V odvozeních vždy uveďte pravidlo gramatiky, které jste využili.)

   (d) [Max. zisk: 6 bodů] V gramatice $\mathcal{G}$ odstraňte (přímou) levou rekursi. Postup popište.

3. [Max. zisk: 17 bodů] Je dán jazyk $L = \{(01)^j 1^i 0^{i+j} \,;\, 0 \leq i, 0 < j\}$ nad abecedou $\Sigma = \{0, 1\}$.

   (a) [Max. zisk: 6 bodů] Sestrojte zásobníkový automat A_1, který přijímá jazyk L prázdným zásobníkem. Zdůvodněte.

   (b) [Max. zisk: 5 bodů] Sestrojte zásobníkový automat A_2, který přijímá jazyk L koncovým stavem. Zdůvodněte.

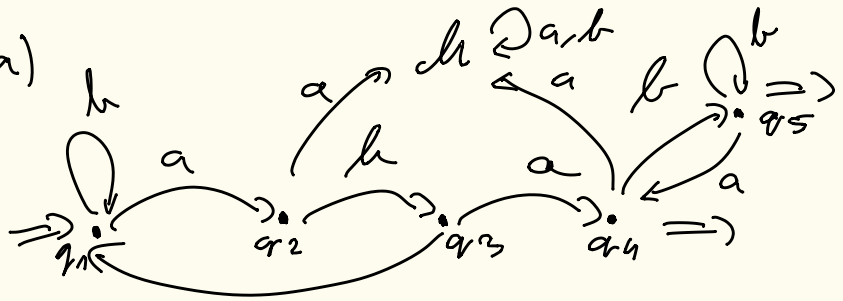
   (c) [Max. zisk: 6 bodů] Ukažte práci zásobníkového automatu A_2 nad slovem 011100 a slovem 010100.

4. [Max. zisk: 10 bodů] Je dán jazyk $L = \{\, a^n b^m c^k \,|\, n = m \text{ nebo } m = k\}$ nad abecedou $\Sigma = \{a, b, c\}$.

   (a) [Max. zisk: 5 bodů] Rozhodněte, zda jazyk L je bezkontextový (bezkontextový jazyk definujte). Své tvrzení zdůvodněte.

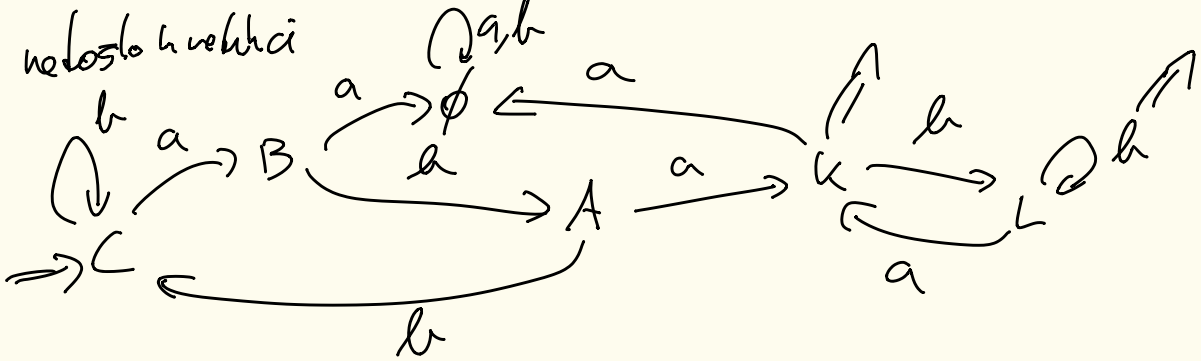
   (b) [Max. zisk: 5 bodů] Rozhodněte, zda jazyk L je regulární (regulární jazyk definujte). Své tvrzení zdůvodněte.

(1) (a)



1 – II –, wiersz. a/b, kontrola, reguła, wiersz
2 – II –, wiersz. a/b, kontrola
3 – II –, wiersz. a/b, kontrola
4 – II –, odsyłacz a/b, kontrola
5 – II –, odsyłacz a/b, kontrola
ch: stan odsyłający q_5

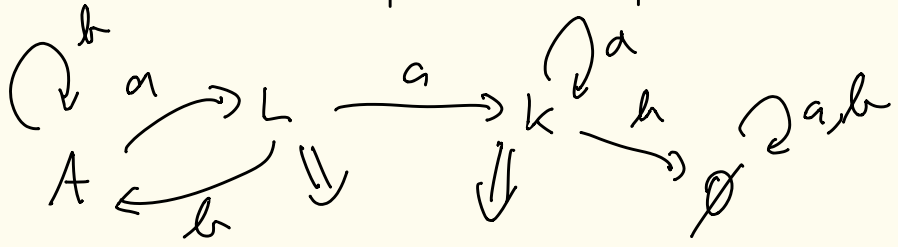
	a	b	n_0	a	b	n_1	a	b	n_2	a	b	n_3	a	b	$n_4=n_3$
⇒1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	B	0	C	B	C	
2	ch	3	0	0	0	0	0	A	B	0	A	B	0	A	
3	4	1	0	K	0	A	K	0	A	K	0	A	K	C	
⇐4	ch	5	K	0	K	K	0	L	K	0	L	K	0	L	
⇐5	4	5	K	K	K	L	K	L	L	K	L	L	K	L	
ch	ch	ch	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	



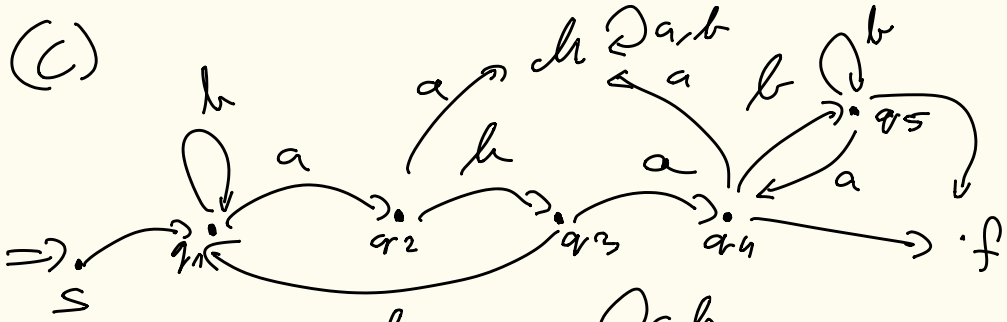
(b) podmnożeniowa konstrukcja

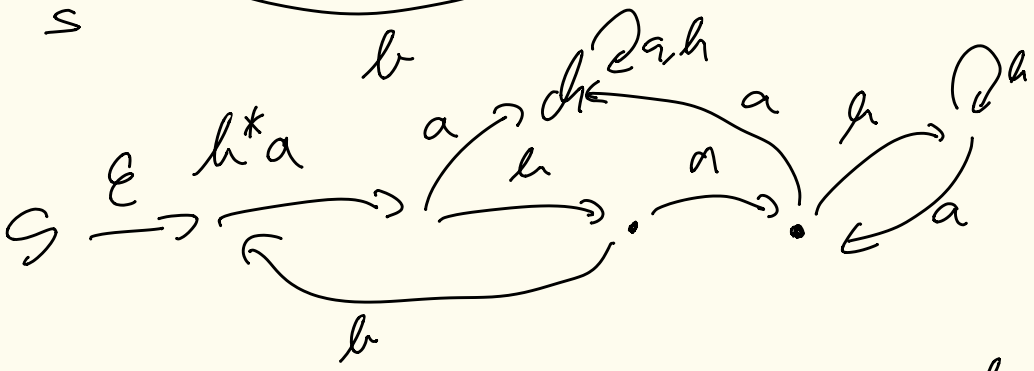
ε-wz(1) = {1, 4, 2}

	a	b	n_0	a	b	n_1	a	b	n_2	a	b	n_3	a	b	$n_4=n_3$
⇒124	345	24	0	K	0	A	K	A	A	L	A	A	L	A	
⇐345	5	124	h	K	0	K	K	A	L	K	A	L	K	A	
24	345	24	0	K	0	A	K	A	A	L	A	A	L	A	
⇐5	5	Ø	K	K	0	K	K	0	K	K	0	K	K	0	
Ø	Ø	Ø	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	

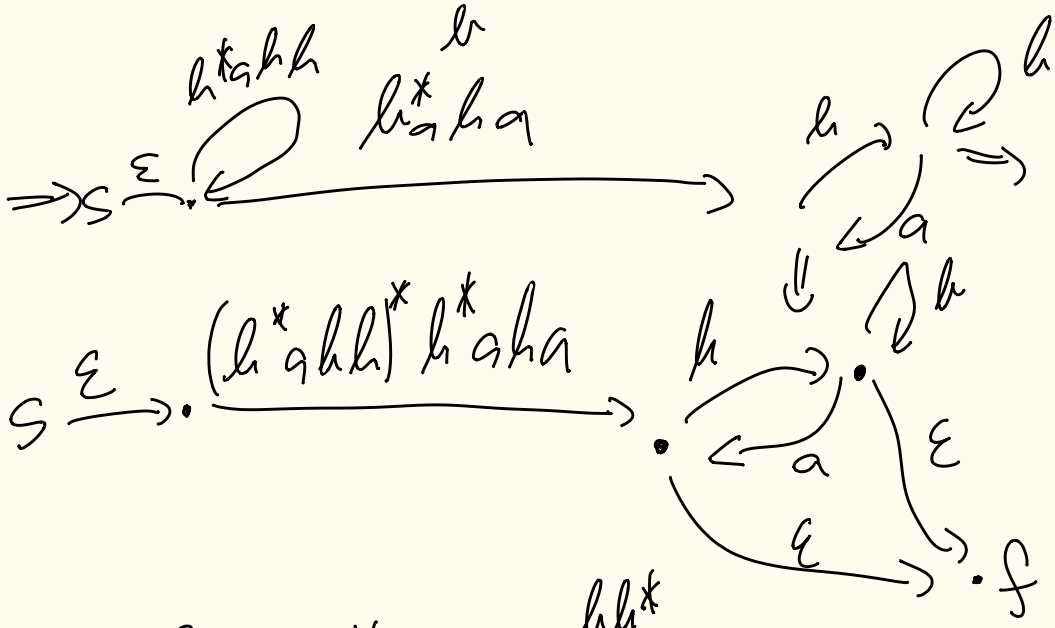


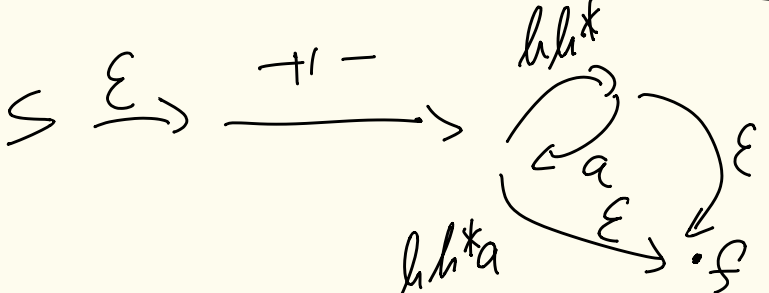
(c)

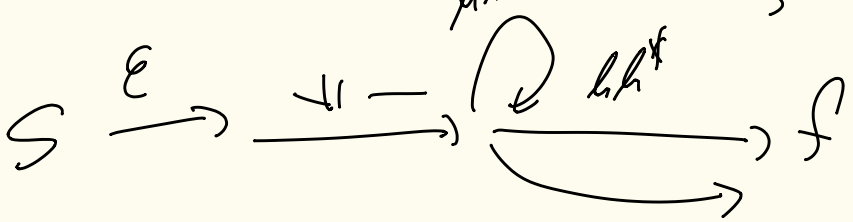

b
a
a
b
a
b
a
b
a
a
b
a
b
q1
q2
q3
q4
q5
f
s

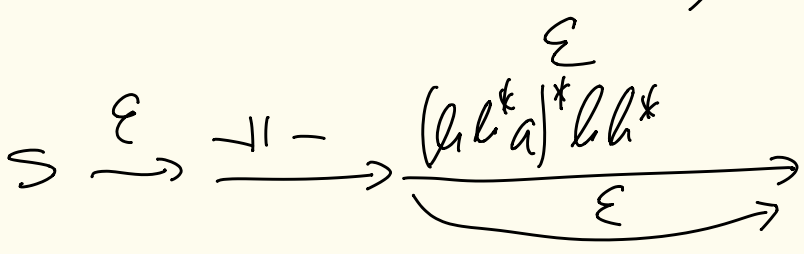

b
a
a
b
a
b
a
b
ε
b*a
b
a

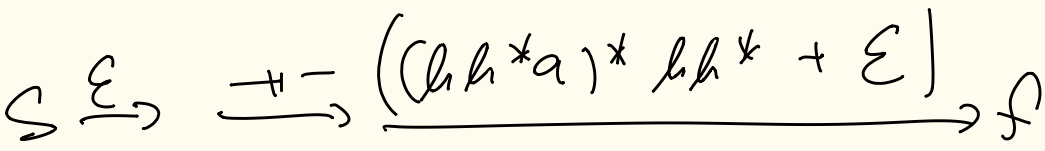

b
a
b
a
ε
b*abb
b


b*abb
b*abba
b
a
b
a
b
ε
(b*abb)*b*abaa
b
a
ε
ε
f

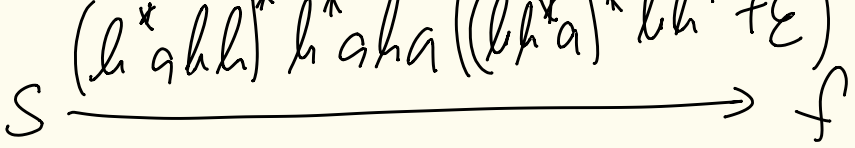

+|−
bb*
a
ε
ε
f


ε
+|−
bb*a
bb*
f

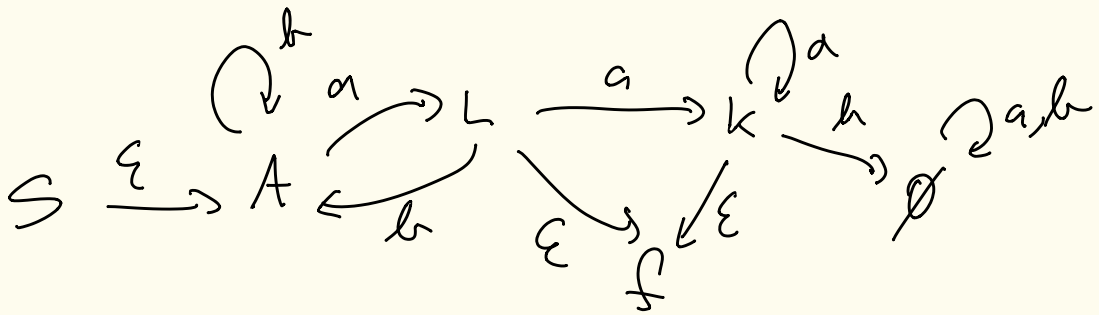

ε
ε
+|−
(bb*a)*bb*
ε
f

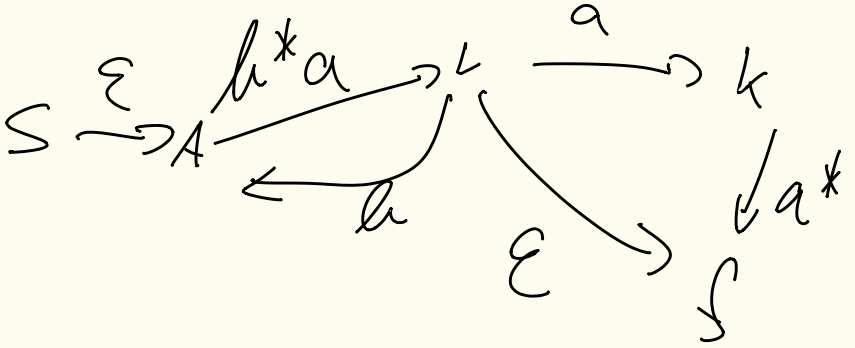

S
ε
+ −
(bb*a)* bb* + ε
f

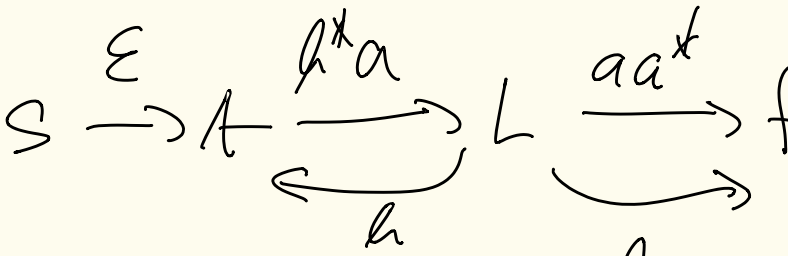
m:

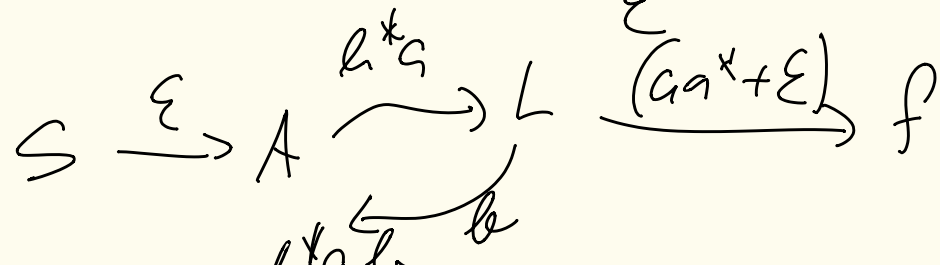

S
(b*abb)* b*abab((bb*a)* bb* + ε)
f

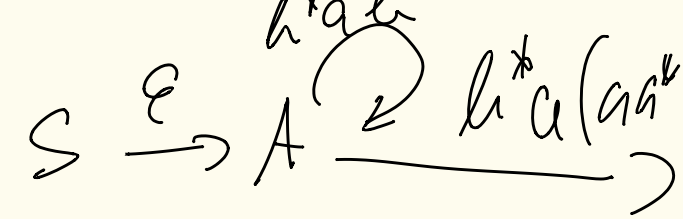
r2:


S
ε
A
b
a
b
a
L
a
K
b
a,b
ε
ε
f

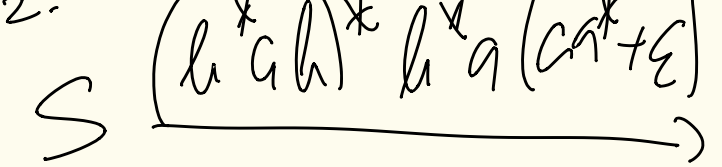

S
ε
A
b*a
b
L
a
K
a*
ε
f


S
ε
A
b*a
b
L
aa*
f


S
ε
A
b*a
L
ε
(aa*+ε)
f
b


S
ε
A
b*ab
b*a(aa*+ε)
f

r2:


S
(b*ab)* b*a(aa*+ε)
f

(d) $\overline{L_1} \subseteq L_2$ a zároveň $L_2 \subseteq \overline{L_1}$

(2) nevypouštěcí gram.

$V = \{A \mid A \Rightarrow^* \varepsilon, A \in N\}$

$V_0 = \{A \mid A \to \varepsilon \in P, A \in N\}$

$V_0 = \{C\}$

$V_1 = \{A \mid A \to \alpha \in P, \alpha \in V_0\}$

$V_1 = \{C, D\}$

$V_2 = \{A \mid A \to \alpha \in P, \alpha \in V_1\}$

$V_2 = \{C, D\} = V_1 = V$

nevypouštěcí gramatika

$S \to ADA \mid AA \mid CB \mid B$

$A \to ACD \mid AC \mid BaD \mid Ba \mid aD \mid a \mid AD$

$B \to CAB \mid AB \mid DB \mid B$

$C \to CS \mid b \mid S$

$D \to aA \mid bB \mid CC \mid C$

$U = \{A \mid S \Rightarrow^* \alpha A \beta\}$
$A \in V \quad \alpha, \beta \in (V \cup \Sigma)^*$

redukce

$V = \{A \mid A \Rightarrow^* w, w \in \Sigma^*\}$

$V_0 = \{A \mid A \to w \in P, w \in \Sigma^*\}$

$V_0 = S$

$V_1 = \{A \mid S \to \alpha A \beta\}$

$V_1 = \{S, A, C, D\}$

$V_2 = V_1 = V$

$V_0 = \{A, C\}$

$V_1 = V_0 \cup \{A \mid A \to \alpha \in P, \alpha \in (V_0 \cup \Sigma)^*\}$

$V_1 = \{S, A, C, D\}$

$V_2 = V_1 \cup \{A \mid A \to \alpha \in P, \alpha \in (V_1 \cup \Sigma)^*\}$

$V_2 = \{S, A, C, D\} = V_1 = V$

redukovaná gramatika:

$S \to ADA \mid AA$
$A \to ACD \mid AC \mid aD \mid a \mid AD$
$C \to CS \mid b \mid S$
$D \to aA \mid CC \mid C$

(Ch) gr. v Ch. n. t. jednom, kde obsahuje pouze pravidla typu

typu

$A \to BC$ $\quad A, B, C \in N$

$A \to a$ $\quad a \in \Sigma$

$S \to ADA \mid AA$
$A \to ACD \mid AC \mid aD \mid a \mid AD$
$C \to CS \mid b \mid ADA \mid AA$
$D \to aA \mid CC \mid CS \mid b \mid ADA \mid AA$

$X_a \to a$
$X_b \to b$

$S \to ADA \mid AA$
$A \to ACD \mid AC \mid X_aD \mid a \mid AD$
$C \to CS \mid b \mid ADA \mid AA$
$D \to X_aA \mid CC \mid CS \mid b \mid ADA \mid AA$
$X_a \to a$
$X_b \to b$
$E \to AC$
$F \to AD$

P_{Ch}:

$S \to FA \mid AA$
$A \to ED \mid AC \mid X_aD \mid a \mid AD$
$C \to CS \mid b \mid FA \mid AA$
$D \to X_aA \mid CC \mid CS \mid b \mid FA \mid AA$

$X_a \to a$
$X_b \to b$

$E \to AC$
$F \to AD$

$N = \{S, A, C, D, E, F, X_a, X_b\}$
$\Sigma = \{a, b\}$
$P = P_{Ch}$

$A \Rightarrow_g^* (aha)^i A \quad \forall i \geq 0$

$i=0$: $A \Rightarrow^{A\to ACD} ACD \Rightarrow^{D\to CC} ACCC \Rightarrow^{C\to\varepsilon} ACC \Rightarrow^{C\to\varepsilon} AC \Rightarrow^{C\to\varepsilon} A$ ✓

IP: $A \Rightarrow_g^* (aha)^i A$

$A \Rightarrow^{A\to aD} aD \Rightarrow^{D\to CC} aCC \Rightarrow^{C\to h} ahC \Rightarrow^{C\to CS} ahCS \Rightarrow^{C\to\varepsilon} ahS \Rightarrow^{S\to ADA}$

$\Rightarrow ahADA \Rightarrow^{A\to aD} ahaDDA \Rightarrow^{D\to CC(2)} ahaCCCCA \Rightarrow^{C\to\varepsilon (4)} ahaA$

$\overset{IP}{\Rightarrow} aha(aha)^i A = (aha)^{i+1} A$ □

(1) $CC \Rightarrow^{C\to\varepsilon} C \Rightarrow^{C\to\varepsilon} \varepsilon$

$(aha)^i ah (aha)^j a \quad i,j \geq 0$

$S \Rightarrow ADA \Rightarrow ACCA \Rightarrow ACA \Rightarrow AA \Rightarrow (aha)^i A A \Rightarrow$

$\Rightarrow (aha)^i A (aha)^j A \Rightarrow (aha)^i aD (aha)^j A \Rightarrow (aha)^i aD (aha)^j aD \Rightarrow$

$\Rightarrow (aha)^i aCC (aha)^j aCC \overset{C\to\varepsilon}{\Rightarrow} (aha)^i aC (aha)^j aCC \overset{C\to h}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow (aha)^i ah (aha)^j aCC \overset{(1)}{\Rightarrow} (aha)^i ah(aha)^j a$ □

(d) odstranění levé rekurze

rekurze je v pravidlech:

$A \to ACD \mid BaD \mid aD$

$C \to CS \mid h \mid \varepsilon$

$A \to BaD \mid BaDA' \mid aD \mid aDA'$

$A' \to CD \mid CDA'$

$C \to h \mid \varepsilon \mid hC' \mid C'$

$C' \to S \mid SC'$

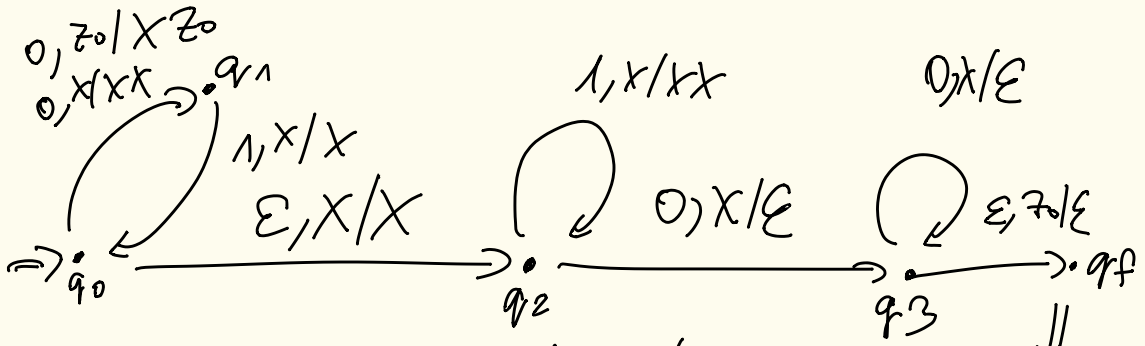
$S \to ADA \mid CB$

$B \to CAB \mid DB$

$D \to aA \mid hB \mid CC$

$A \to A\alpha_1$
$A \to \beta_i$
mimo
$A \to \beta_i \mid \beta_i A'$
$A' \to \alpha_i \mid \alpha_i A'$

(3) $(01)^i 1^i 0^{i+j}$ $0 \le i$, $0 < j$ $EA: \{Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F\}$



Zásobníkový automat přijme všechna slova v L a zároveň při posunu všem do q_0 je na vrcholu zásobníku Z_0, a stav q_0 je možno opustit do q_2 pouze ε přechodem, když je na vr. X. To se stane minimálně jedním přechodem do q_1 a q_0. Každý tento přechod přidá jedno X na zás. opuštěním q_0 do q_2 ε přechodem se pozná X na zás. a zároveň. (přechod $q_1 - q_0$ musíme provést 1-krát, a ekvivalentně jedno). Nyní je na zásobníku $X^i Z_0$ Smyčkou v q_2 musíme provést j-krát. Potom je na zás. $X^j X^i Z_0$. Přechodem do q_3 a smyčkou v q_3 vždy odstraníme jedno X, kdy musíme přečíst 0^{j+1}. Do f se dostaneme pouze se Z_0 a vyprázdněním zásobníku.

(c) $(q_0, 011100, Z_0) \vdash (q_1, 11100, XZ_0) \vdash (q_0, 1100, XZ_0) \vdash$

$\vdash (q_2, 1100, XZ_0) \vdash (q_2, 100, XXZ_0) \vdash (q_2, 00, XXXZ_0) \vdash$

$\vdash (q_3, 0, XXZ_0) \vdash (q_3, \varepsilon, XZ_0)$ není přijato

$(q_0, 01\,01\,00, Z_0) \vdash (q_1, 10100, XZ_0) \vdash (q_0, 0100, XZ_0) \vdash$ $\vdash^{(n)}$

$\vdash (q_1, 100, XXZ_0) \vdash (q_0, 00, XXZ_0) \vdash (q_2, 00, XXZ_0) \vdash$

$\vdash (q_3, 0, XZ_0) \vdash (q_3, \varepsilon, Z_0) \vdash (q_f, \varepsilon, \varepsilon)$ přijato

$\vdash^{(n)} (q_2, 0100, XZ_0) \vdash (q_3, 100, Z_0) \vdash (q_f, 100, \varepsilon)$ nepřijato, ještě jsme nedočetli slovo

(4)
Je dán jazyk $L = \{a^n b^m c^k \mid n = m \text{ nebo } m = k\}$ nad abecedou

$\Sigma = \{a, b, c\}$

CF g. je kterou G, kde jsou všechna pravidla tvaru

$A \to \gamma$

$\gamma \in (N \cup \Sigma)^*$ a A je neterminál

a L je CF, když je generován CF gramatikou.

$L = a^n b^n c^k$

$S \to AB \mid CD$
$A \to aAb \mid \varepsilon$
$B \to cB \mid \varepsilon$
$C \to aC \mid \varepsilon$
$D \to bDc \mid \varepsilon$

Dk: když $n = m$

(i) $S \overset{S \to AB}{\Rightarrow} AB \overset{A \to aAb}{\Rightarrow}{}^{(n)} a^n A b^n B \overset{A \to \varepsilon}{\Rightarrow} a^n b^n B \Rightarrow$
$\overset{B \to cB}{\Rightarrow}{}^{(k)} a^n b^n c^k B \overset{B \to \varepsilon}{\Rightarrow} a^n b^n c^k$ □

když $m = k$

$S \overset{S \to CD}{\Rightarrow} CD \overset{C \to aC}{\Rightarrow}{}^{(n)} a^n CD \overset{C \to \varepsilon}{\Rightarrow} a^n D \overset{D \to bDc}{\Rightarrow}{}^{(k)}$

$\Rightarrow a^n b^k D c^k \overset{D \to \varepsilon}{\Rightarrow} a^n b^k c^k$ □

(iii) nepůjde nic moc: na začátku si vybereme jednu z větví (buď AB nebo CD), do S už se nám žádné A nebo C dostat nedá.

$$\begin{array}{l|l} \exists A \Rightarrow^* a^i b^i & \exists C \Rightarrow^* a^k \\ \exists B \Rightarrow^* C^j & \exists D \Rightarrow^* b^l c^l \\ \vdots & \end{array}$$

(b) Regulární jazyky jsou jazyky definované indukcí:
$\emptyset$ je regulární, pro $\forall a \in \Sigma$, $\{a\}$ je reg.
když L_1 a L_2 reg., potom $L_1 L_2$, L_1^*, $L_1 \cup L_2$ je reg.
nebo
Reg. jazyky jsou jazyky které přijme DFA.

Když $L \subseteq \Sigma^*$ regulární, existuje by ekvivalence T, splňující:

(1) L je sjednocením některých tříd ekv. T
(2) když existují nějaké $u, v \in \Sigma^*$ takové, že $u T v$, potom $\forall w \in \Sigma^*$, že $uwTvw$.
(3) T má pouze konečně mnoho tříd.

Zvolme nekonečnou posloupnost slov.

$$ab^2, a^2b^3, \ldots a^k b^{k+1}$$

potom $\exists i, j$ takové, že $i \neq j$ $i > j$ tak že $a^i b^{i+1} T a^j b^{j+1}$

potom zvolme $w = c^{i+1}$

$$a^i b^{i+1} c^{i+1} \; T \; a^j b^{j+1} c^{i+1}$$

$\in L$ $\notin L$, protože nepůjde $j = j+1$, ani $j+1 \Rightarrow i+1$, protože $j < j$

protože $i+1 = i+1$

Lemma vždy.

$S \to SA \mid SB \mid 0 \mid 1$

$S \to 0 \mid 0S' \mid 1 \mid 1S'$

$S' \to A \mid B \mid AS' \mid BS'$

$A \to A\alpha_i$

$A \to \beta_i$

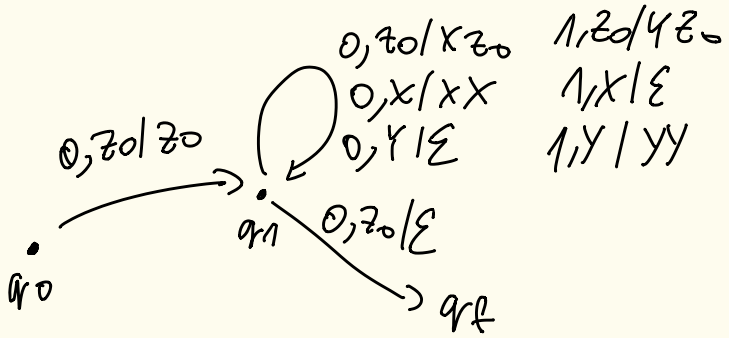
nebo:

$A \to \beta_i \mid \beta_i A'$

$A' \to \alpha_i \mid \alpha_i A'$

$L = \{w \mid |w|_0 = |w|_1 + 2$ a w začíná a končí $0\}$

$\Sigma = \{0,1\}$ $\{|w|_1$ je rovno počtu výskytů symbolu 1 ve slově $w\}$



Zkouška z předmětu A4B01JAG

Identifikační číslo:

Jméno a příjmení:

Příklad	Body
1	
2	
3	
4	
Σ	

Odpovídejte celou větou (na každou otázku) a každé své tvrzení řádně zdůvodněte.

1. [Max. zisk: 30 bodů]

   (a) [Max. zisk: 8 bodů] Je dán regulární výraz $\mathbf{r} = (\mathbf{a} + \mathbf{ab} + \mathbf{bb})(\mathbf{a} + \mathbf{b})^\star$. Sestrojte konečný automat (DFA) M_1, který přijímá jazyk popsaný regulárním výrazem $\mathbf{r}$.

   (b) [Max. zisk: 8 bodů] Je dán DFA M_2 tabulkou

		a	b
$\rightarrow$	1	2	4
	2	3	4
$\leftarrow$	3	4	3
	4	4	4

   (c) [Max. zisk: 6 bodů] Napište regulární výraz, jehož hodnotou je jazyk L_2 přijímaný DFA M_2.

   (d) [Max. zisk: 8 bodů] Rozhodněte, zda platí některá z inkluzí $L_1 \subseteq L_2$, $L_2 \subseteq L_1$ nebo obě. Zdůvodněte.

2. [Max. zisk: 20 bodů] Je dán jazyk $L = \{a^{3n}b^{2m} \mid n, m \geq 0\}$.

   (a) [Max. zisk: 2 body] Definujte bezkontextovou gramatiku.

   (b) [Max. zisk: 10 bodů] Sestroje bezkontextovou gramatiku $\mathcal{G}$, která generuje jazyk L.

   (c) [Max. zisk: 8 bodů] Bezkontextovou gramatiku $\mathcal{G}$ z bodu a) převeďte do Chomského normálního tvaru.

3. [Max. zisk: 30 bodů] Je dána bezkontextová gramatika $\mathcal{G} = (N, \Sigma, S, P)$, kde $N = \{S, A, B\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, pravidly

$$S \rightarrow ABS \mid ab$$
$$A \rightarrow aAb \mid ab$$
$$B \rightarrow bBa \mid \epsilon$$

   (a) [Max. zisk: 10 body] Sestrojte zásobníkový automat A, který přijímá jazyk L generovaný gramatikou $\mathcal{G}$.

   (b) [Max. zisk: 10 body] Popište výpočet zásobníkového automatu A z bodu a) přijímající slovo *aabbab*.

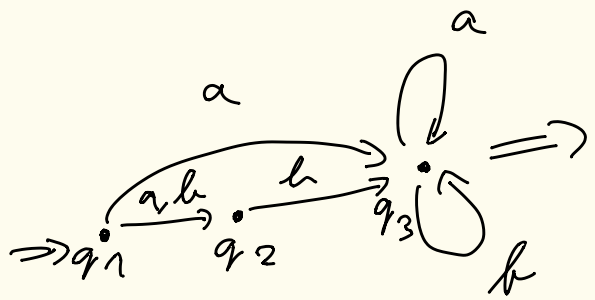
   (c) [Max. zisk: 10 body] Ukažte, že slovo *abbbaa* není přijímáno zásobníkovým automatem A (z bodu a)).

4. [Max. zisk: 20 bodů] Je dán jazyk $L = \{1^k 0^l 1^k \mid l < k\}$.

   (a) [Max. zisk: 10 bodů] Rozhodněte, zda L je bezkontextový jazyk. (Je-li bezkontextový, sestrojte bezkontextovou gramatiku, která ho generuje, není-li bezkontextový, dokažte to.)

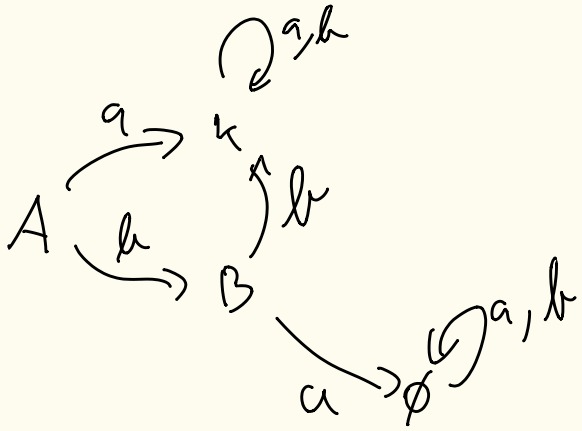
   (b) [Max. zisk: 10 bodů] Rozhodněte, zda L je regulární jazyk. (Je-li regulární, sestrojte konečný automat, který ho přijímá, není-li regulární, dokažte to.)

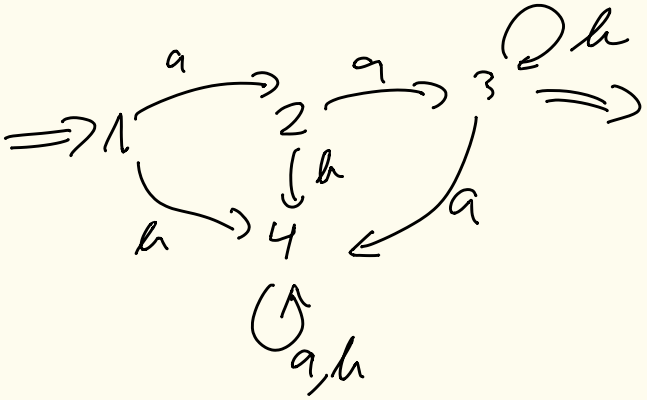
(1) (a) $r = (a + ab + bb)(a + b)^*$

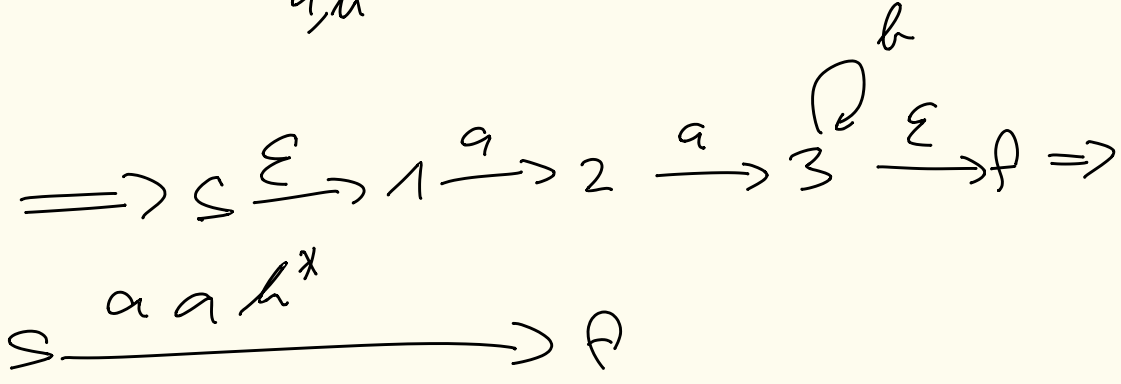


	a	b
1	2,3	2
2	∅	3
3	3	3

	a	b	r_0	ar_0	r_1	ar_1	r_2
⇒1	23	2	0	K 0	A	K B	A
⇐23	3	3	K	K K	K	K K	K
2	∅	3	0	0 K	B	0 K	B
⇐3	3	3	K	K K	K	K K	K
∅	∅	∅	0	0 0	0	0 0	0







(d) $L_1 \subseteq L_2$, $L_2 \subseteq L_1$

určitě platí $L_2 \subseteq L_1$, jelikož aab^* lze vygenerovat pomocí

$(a+ab+abb)(a+b)^*$

↳ $a(a+b)^*$

$L_1 \not\subseteq L_2$, protože $bb \notin L_2$

2) CF gram. je bilokód gram., které mají pravidla tvaru

$A \to \gamma$, A je neterm. a $\gamma \in (\Sigma \cup N)^*$

$S \to AB$

$A \to aaaA \mid \varepsilon$

$B \to bbB \mid \varepsilon$

(a) max použití:

$V = \{A \mid A \Rightarrow^* \varepsilon\}$ $A \in N$

$V_0 = \{A, B\}$ $V_0 = \{A \mid A \to \varepsilon \in P\}$

$V_1 = \{A \mid A \to \alpha, \alpha \in V_0\} \cup V_0$

$V_1 = \{S, A, B\} = V_2 = V$

$S \to AB \mid A \mid B$

$A \to aaaA \mid aaa$

$B \to bbB \mid bb$

(b) odstranění pravidla tvaru

$X \to Y$, $X, Y \in N$

$S \to AB \mid aaaA \mid aaa \mid bbB \mid bb$

$A \to aaaA \mid aaa$

$B \to bbB \mid bb$

(c) nova pravila za ah

$X_a \to a$

$X_b \to b$

$S \to AB \mid X_aX_aX_aA \mid X_aX_aX_a \mid X_bX_bB \mid X_bX_b$

$A \to X_aX_aX_aA \mid X_aX_aX_a$

$B \to X_bX_bB \mid X_bX_b$

(d) zbirna pravila > 2

$X_a \to a$

$X_b \to b$

$C \to X_aX_a$

$D \to X_aA$

$E \to X_bX_b$

$S \to AB \mid CD \mid CX_a \mid EB \mid X_bX_b$

$A \to CD \mid CX_a$

$B \to EB \mid X_bX_b$

(3)

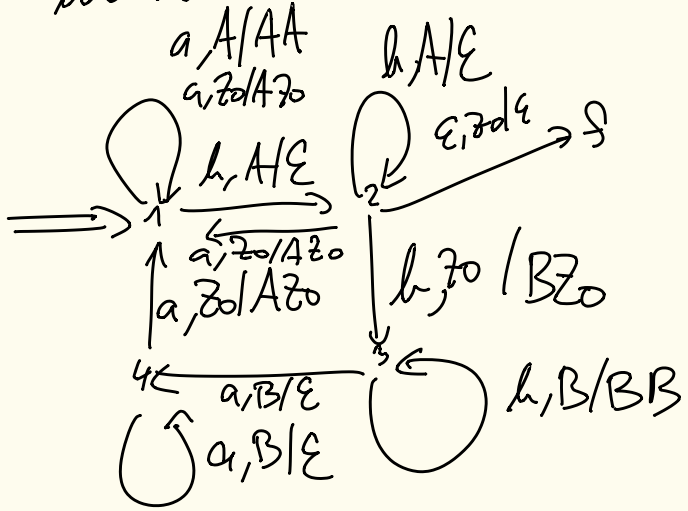
$ABABAB\ldots ABab$

aa aa bbbb

bb-aa

ABS

aaE



aabbab

AB aabb

aabbab

$(q_1, aabbab, Z_0) \vdash (q_1, abbab, AZ_0) \vdash (q_1, bbab, AAZ_0) \vdash (q_2, bab, AAZ_0) \vdash$

$\vdash (q_2, ab, Z_0) \vdash (q_1, b, AZ_0) \vdash (q_2, \varepsilon, Z_0) \vdash (f, \varepsilon, \varepsilon)$

dosli jsmo do f.

$(q_1, aaabbaa, z_0) \vdash (q_2, aaabbaa, Az_0) \vdash (q_2, abbaa, z_0) \vdash$

$\vdash (q_3, baa, Bz_0) \vdash (q_3, aa, BBz_0) \vdash (q_4, a, Bz_0) \vdash (q_4, \varepsilon, z_0)$

nebo jsme chtěli

(4) Když L bude Reg, existuje pro ně čerpací číslo T, pro které bude platit:

(1) L je spočetnou sjednocením třídy čerpací číslo T

(2) pokud existují $u, v \in \Sigma^*$ pro které platí uTv, potom $\forall w \in \Sigma^*$ platí $uwTvw$.

(3) T má nejvíce hodnotu menší než T.

Vezměme nekonečnou posloupnost slov:

$1, 1^2, 1^3, \ldots, 1^j, \ldots 1^i$

potom $\exists i, j$, tak, že $i \neq j$, $j < i$ (podle (2) a (3))

a $1^i T 1^j$ $i, j > 0$

potom zvolme $w = 1^i$

čili:

$1^i 1^i T 1^j 1^i$ ✗ protože $j \neq i$

$\wedge$

$\perp$

protože $1^k 0 1^k$, $i = i$

Ukázka písemného testu z A4B01JAG

1. [Max. zisk: 28 bodů] Jazyk L je dán regulárním výrazem

$$\mathbf{r} = (\mathbf{a}^\star(\mathbf{a}+\mathbf{b})\mathbf{b})^\star.$$

   (a) [Max. zisk: 10 bodů] Sestrojte konečný deterministický automat M, který přijímá jazyk L. Fakt, že M přijímá L, zdůvodněte.

   (b) [Max. zisk: 4 body] Automat M z bodu (a) redukujte, nebo ukažte, že je již redukovaný.

   (c) [Max. zisk: 4 bodů] Sestrojte konečný deterministický automat $\overline{M}$, který přijímá doplněk jazyka L, tj. jazyk $\overline{L}$. Fakt, že $\overline{M}$ přijímá $\overline{L}$, zdůvodněte.

   (d) [Max. zisk: 6 bodů] Napište regulární výraz $\mathbf{r}_1$ odpovídající jazyku $\overline{L}$.

   (e) [Max. zisk: 4 body] Najděte slovo, které neleží v jazyce reprezentovaném regulárním výrazem $\mathbf{r}\,\mathbf{r}_1$, nebo ukažte, že takové slovo neexistuje.

2. [Max. zisk: 25 bodů] Je dána bezkontextová gramatika $\mathcal{G} = (N, \Sigma, S, P)$, kde $N = \{S, A, B, C\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$ a P je dáno

$$\begin{aligned} S &\to SA \,|\, 0 \\ A &\to BAB \,|\, 1 \\ B &\to CB \,|\, \varepsilon \\ C &\to AS \,|\, 0 \,|\, \varepsilon \end{aligned}$$

   (a) [Max. zisk: 3 body] Ke gramatice $\mathcal{G}$ najděte nevypouštěcí gramatiku $\mathcal{G}_1$. Kroky převodu popište.

   (b) [Max. zisk: 5 bodů] V gramatice $\mathcal{G}_1$ odstraňte levou rekursi. Postup, který jste použili, popište.

   (c) [Max. zisk: 6 bodů] S využitím indukce dokažte, že každé slovo 01^i, $i \geq 1$, je generováno jak gramatikou $\mathcal{G}$, tak gramatikou $\mathcal{G}_1$.

   (d) [Max. zisk: 6 bodů] Rozhodněte, zda slovo 010101 je generováno gramatikou $\mathcal{G}$. Jestliže ano, najděte derivační stromy tohoto slova v obou gramatikách $\mathcal{G}$ a $\mathcal{G}_1$ a levou derivaci v gramtice $\mathcal{G}$. Jestliže slovo 010101 není generováno, zdůvodněte to.

   (e) [Max. zisk: 5 bodů] Je gramatika $\mathcal{G}$ víceznačná? Odpověď zdůvodněte, víceznačnou gramatiku definujte.

3. [Max. zisk: 25 bodů] Je dán jazyk $L = \{w\,;\, |w|_b = |w|_a + 1 \;\text{ a } w \text{ začíná } b \text{ a končí } a\}$ nad abecedou $\Sigma = \{a, b\}$ (zde $|w|_a$ je rovno počtu výskytů symbolu a ve slově w.)

   (a) [Max. zisk: 6 bodů] Sestrojte zásobníkový automat A_1, který přijímá jazyk L prázdným zásobníkem. Zdůvodněte že A_1 přijímá L.

   (b) [Max. zisk: 6 bodů] Sestrojte zásobníkový automat A_2, který přijímá jazyk L koncovým stavem. Zdůvodněte že A_2 přijímá L.

   (c) [Max. zisk: 6 body] Ukažte práci jednoho ze zásobníkových automatů A_1, A_2 nad slovem *babba* a slovem *baaba*.

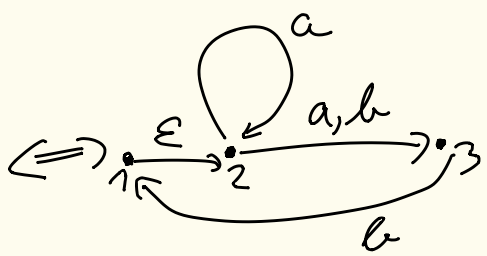
   (d) [Max. zisk: 7 bodů] Je jazyk L přijímán také deterministickým zásobníkovým automatem prázdným zásobníkem? Odpověď zdůvodněte. (Deterministický zásobníkový automat definujte.)

4. [Max. zisk: 22 bodů] Je dán jazyk $L = \{\, 1^n 0^k 1^{n+3} |\, k > 0, n \geq 0\}$ nad abecedou $\Sigma = \{0, 1\}$.

   (a) [Max. zisk: 11 bodů] Rozhodněte, zda jazyk L je bezkontextový (bezkontextový jazyk definujte). Své tvrzení zdůvodněte.

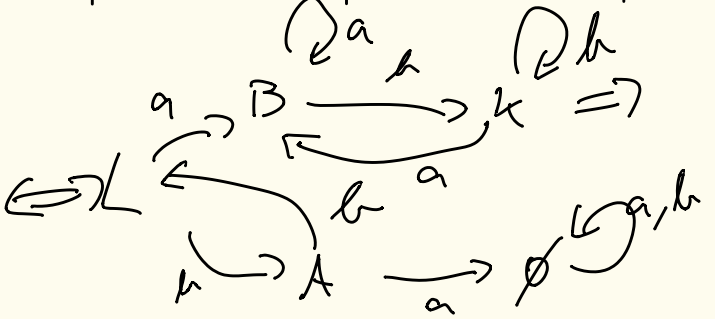
   (b) [Max. zisk: 11 bodů] Rozhodněte, zda jazyk L je regulární (regulární jazyk definujte). Své tvrzení zdůvodněte.

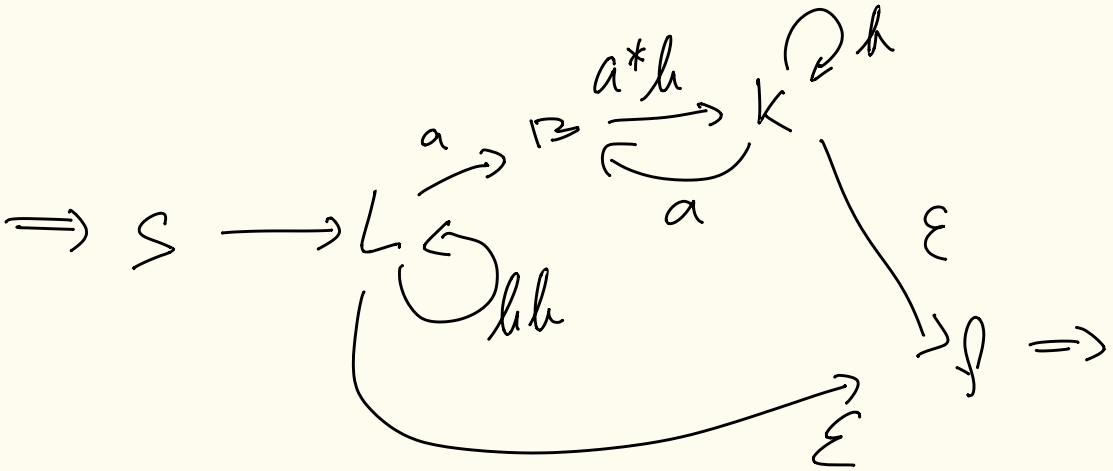
(a) $r=(a^*(a+b)b)^*$

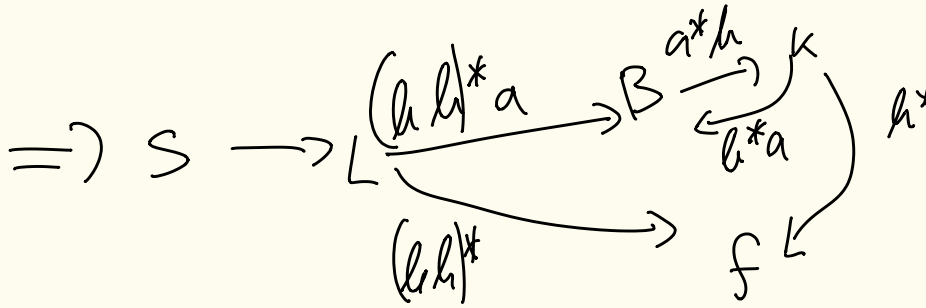


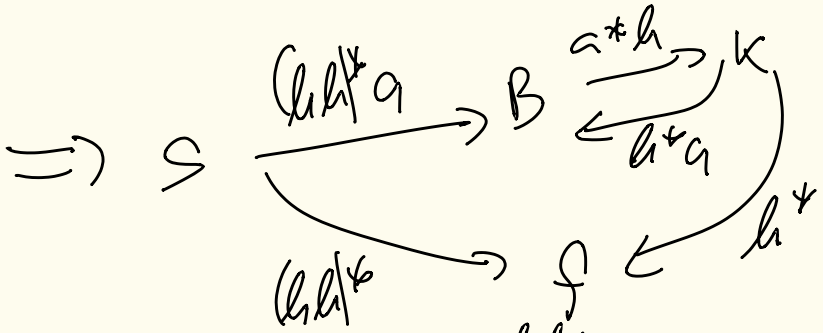
	ε	a	b
1	2	∅	∅
2	∅	23	3
3	∅	∅	1
∅	∅	∅	∅

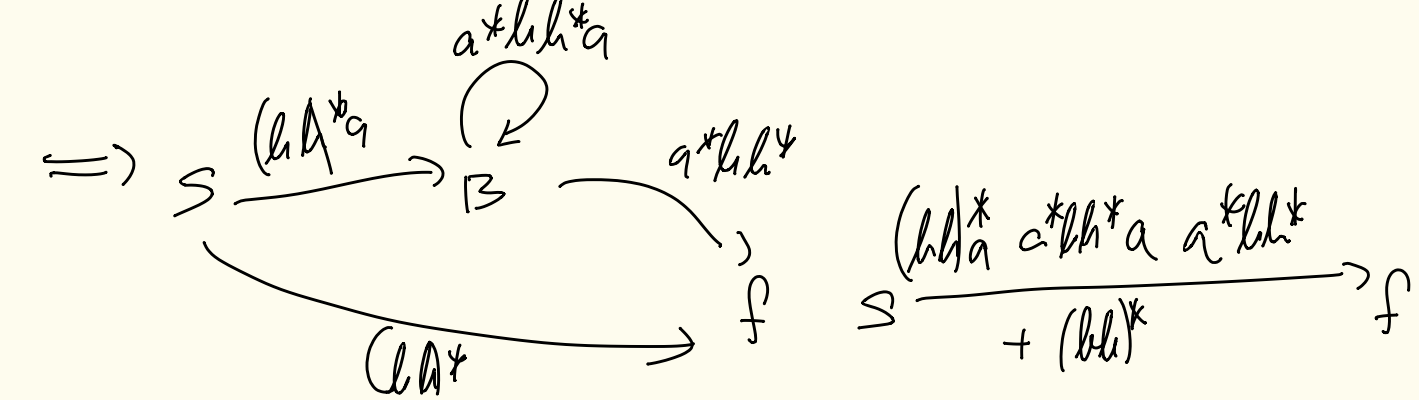
	a	b	n_0	a	b	n_1	a	b	n_2	a	b
⇔12	23	3	K	K	0	L	A	A	L	B	A
23	23	123	0	0	K	A	A	A	B	B	K
3	∅	12	0	0	K	A	0	L	A	0	L
⇐123	23	123	K	K	K	K	A	A	K	B	K
∅	∅	∅	0	0	0	0	0	0	0	0	0

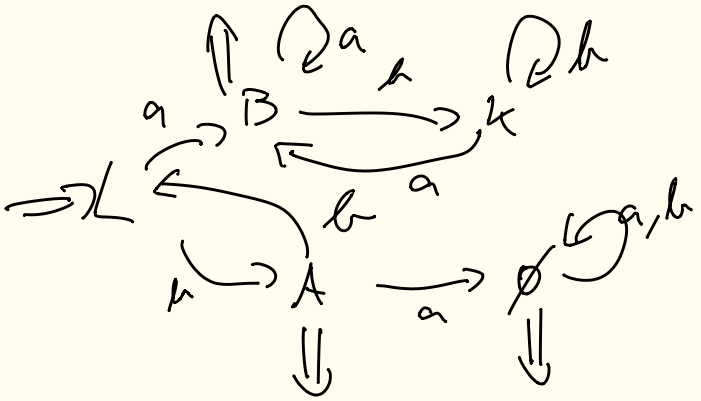












(2) $V = \{A \mid A \Rightarrow^* \varepsilon\}\ A \in N$

$V_0 = \{A \mid A \to \varepsilon \in P\}$

$V_0 = \{B, C\}$

$V_1 = \{A \mid A \to w, w \in V_0\} \cup V_0$

$V_1 = \{B, C\} = V_0 = V$

P_1:

$S \to SA|0$

$A \to BAB|1|AB|BA$

$B \to CB|C|B$

$C \to AS|0$

$G_1 = (N, \Sigma, S, P_1)$

$N = \{S, A, B, C\}$

$\Sigma = \{0, 1\}$

odstranění l. r.

$A \to A\alpha_i$

$A \to \beta_i$

nová:

$A \to \beta_i A' \mid \beta_i$

$A' \to \alpha_i \mid \alpha_i A'$

GPR:

$S \to 0 \mid 0S'$

$S' \to A \mid AS'$

$A \to BAB \mid BABA' \mid 11 \mid 1A' \mid BA \mid BAA'$

$A' \to B \mid BA'$

$B \to CB \mid C \mid B$

$C \to AS \mid 0$

G:

$n=0 \quad S \to 0$ ✓

$S \Rightarrow_G^* 01^i$

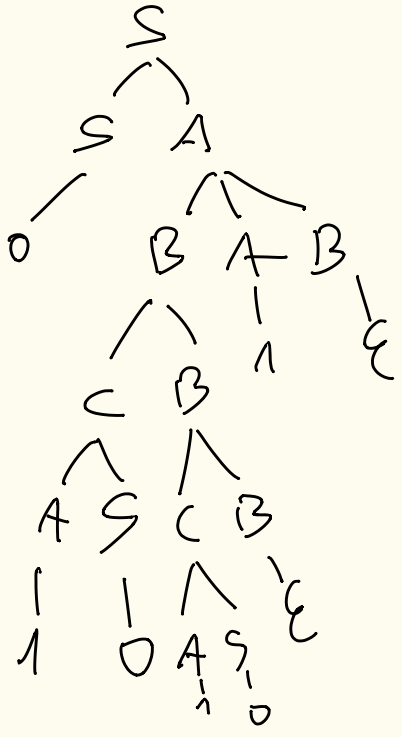
$S \to SA \to S1 \overset{IP}{\to} 01^i1 \to 01^{i+1}$ □

g_1:

$n=0: S \to 0$

IP: $S \Rightarrow_{g_1}^* 01^i$

$S \to SA \to S1 \overset{IP}{\to} 01^i1 \to 01^{i+1}$ □



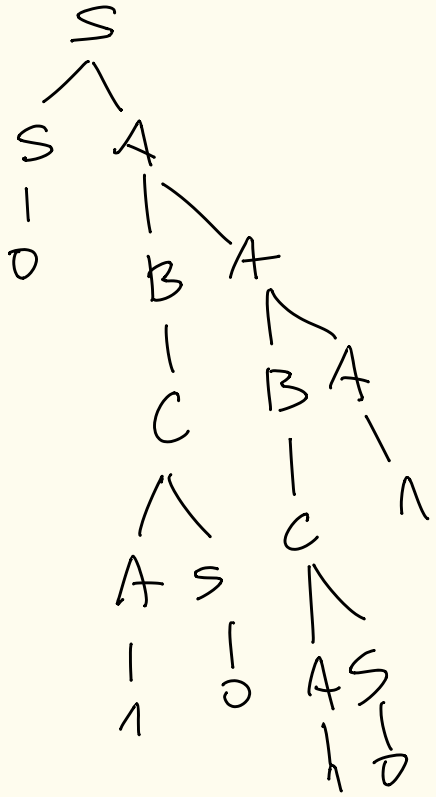
01 0101

$S \to SA|0$

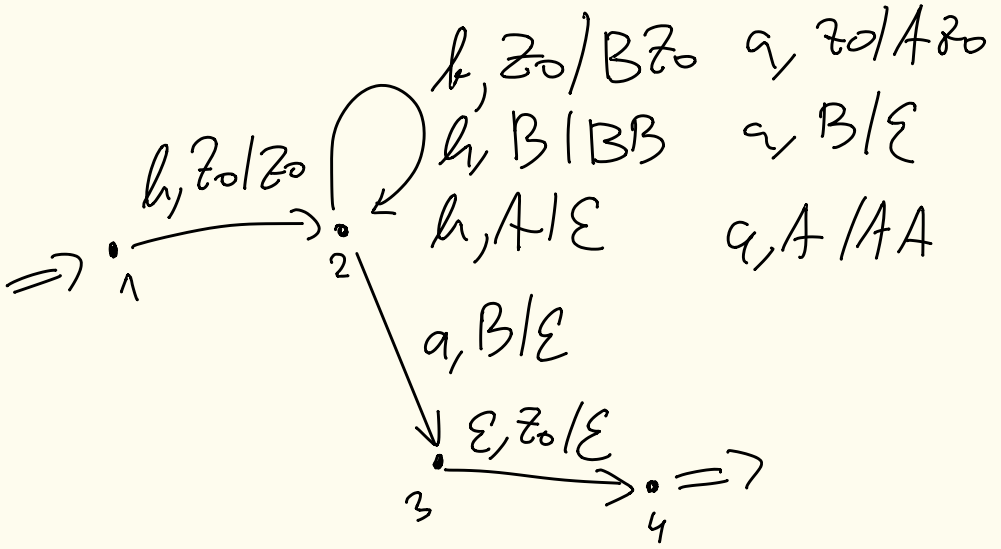
$A \to BAB|1|AB|BA$

$B \to CB|C|B$

$C \to AS|0$



(3) $L = \{w \mid |w|_b = |w|_a + 1, w \text{ zeroch, kons } a\}$

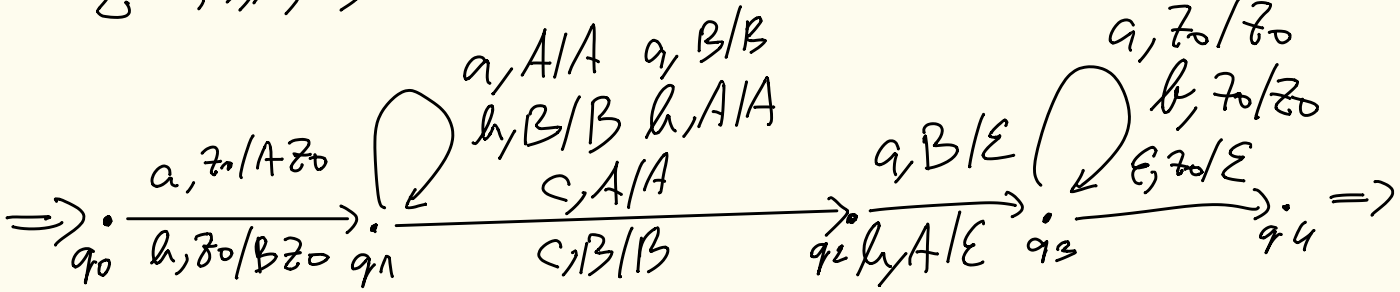


(d) ne, jazyk není bezprefixový

<u>liba|liba</u>

$L = \{ u c v \mid u, v \in \{a,b\}^+ \quad u, v$ zrcadlové obrazy $\}$

$\Sigma = \{a, b, c\}$



$L = 1^n 0^k 1^{n+3} \quad k > 0, n \geq 0 \qquad \Sigma = \{0, 1\}$

CF G:

$A \to \gamma, \quad A \in N$

$\gamma \in (N \cup \Sigma)^*$

potom bezkontextový L je takový, který je generován CF-G

(1)
$S \to A111$

$A \to 1A1 \mid B$

$B \to 0B \mid 0$

(a) generuje $1^n 0^k 1^{n+3}$?

$S \Rightarrow A111 \Rightarrow 1^n A 1^n 111 \Rightarrow 1^n B 1^{n+3} \Rightarrow 1^n 0^{k-1} B 1^{n+3}$

($S \to A111$, $A \to 1A1$ (n), $A \to B$, $B \to 0B$ (k−1))

$1^n A 1^n 111 = 1^n A 1^{n+3}$

$\Rightarrow 1^n 0^{k-1} 01^{n+3} = 1^n 0^k 1^{n+3}$

($B \to 0$)

$1^n 0^{k-1} 0$ = 0^k

$k > 0$, jelikož musíme použít pravidlo $B \to 0$

$n \geq 0$, protože můžeme za A vložit B

(b)

$1, 1^2, 1^3 \ldots 1^i, 1^j$

$i \neq j \quad j > i$

$1^i \top 1^j$

$w = 0^k 1^{i+3} \quad k > 0$ lis.

proto $1^i 0^k 1^{i+3} \top 1^i 0^k 1^{i+3}$

odpovídá řetězu $1^i 0^k 1^{i+3}$

$j > i$, tedy $j+3 \neq i+3$ $\lightning$ $\Rightarrow$ (1)

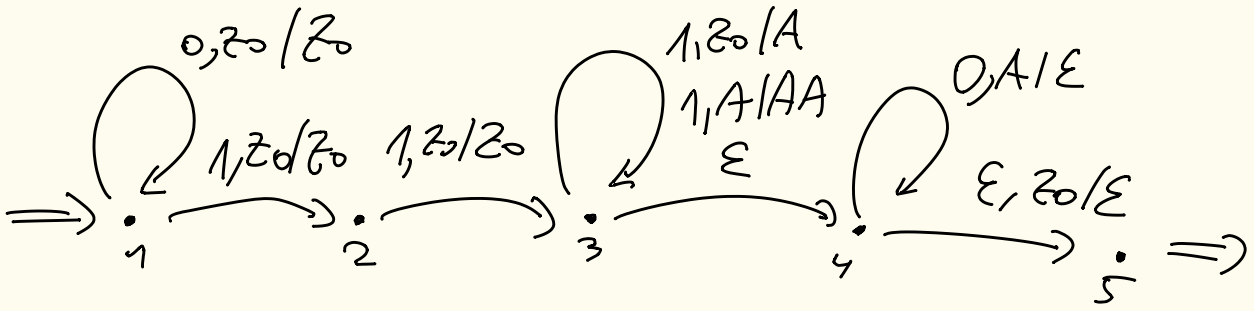
L není Reg.

Reg. gram. Reg L je generován Reg. R.

$A \to wB, A \to w$

$A, B \in N$, w je term. slovo

$L = \{0^i 1^j 0^{j-2} \mid 0 \le i,\ 2 \le j\}$ $\quad \Sigma = \{0, 1\}$



$w = uu^R, \quad u \in \{a, b\}^*,$

$b \dots b^i \dots b^j \qquad j \neq i$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad j > i$

pokus $b^i T b^j \rightsquigarrow$ (2) $b^i w T b^j w \quad \forall w \in \Sigma^*$

zvolím $w = a b b a b^i$

pokus $b^i a b b a b^i T b^j a b b a b^i$

u u^R — $u \in L$, $b^i a b b a b^i \notin L$

kdyby $i \neq j$ tak slovo nelze rozdělit $a\, u u^R$ (každé obsahuje jenom jedno a)