Teorie jazyků a automatů— 11. týden

Marie Demlová

http://math.feld.cvut.cz/en/people/demlova

2. 12. 2024

Zásobníkové automaty

Tvrzení.

Ke každému zásobníkovému automatu A existuje zásobníkový automat B takový, že

$$L(A) = N(B).$$

ZA $A = (Q_A, \Sigma, \Gamma_A, \delta_A, q_A, Z_A, F_A) \rightsquigarrow B = (Q_B, \Sigma, \Gamma_B, \delta_B, q_B, Z_B)$

$L(A) = N(B)$

$Q_B = Q_A \cup \{q_B, q_M\}$ $\Gamma_B = \Gamma_A \cup \{Z_B\}$

$\delta_B(q_B, \varepsilon, Z_B) = \{(q_A, \varepsilon_A Z_B) \mid \delta_B(q, a, X) = \delta_A(q, a, X)$

$\delta_B(q_A, \varepsilon, X) = \{(q_M, \varepsilon)\}$ $\delta_B(q_M, \varepsilon, X) = (q_M, \varepsilon)$ $q \in Q$, $X \in \Gamma_A$

$q_f \in F$ $X \in \Gamma_B$

(a) $L(A) \subseteq N(B)$

$w \in L(A)$ iff $(q_A, w, Z_A) \overset{*}{\vdash}_A (q_A, \varepsilon, \gamma)$

$(q_B, w, Z_B) \vdash_B (q_A, w, Z_A \gamma_B) \overset{*}{\vdash}_B (q_f, \varepsilon, \gamma_{Z_B})$

$\vdash_B (q_M, \varepsilon, \gamma Z_B) \vdash_B (q_M, \varepsilon, \varepsilon)$

$+ j \; w \in N(B)$

$N(B) \subseteq L(A)$

(b) $w \in N(B)$ iff

$\vdots$

$G = (N, \Sigma, S, P)$ je CF gramatika $\rightsquigarrow$ ZA $A = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0)$

$L(G) = N(A)$

$Q = \{q\}$ $q_0 = q$, $\Gamma = N \cup \Sigma$, $Z_0 = S$

$X \in N$ $\delta(q, \varepsilon, X) = \{(q, \alpha) \mid X \to \alpha \in P\}$

Věta.

Ke každé CF gramatice $\mathcal{G} = (N, \Sigma, S, P)$ existuje zásobníkový automat A takový, že

$$L(\mathcal{G}) = N(A).$$

Příklad. Je dána bezkontextová gramatika $\mathcal{G}$ pravidly:

$$S \to aSa \mid A$$
$$A \to bA \mid \varepsilon$$

Zkonstruujte zásobníkový automat přijímající jazyk $L(\mathcal{G})$.

Pr.

$S \to aSa \mid A$

$A \to bA \mid \varepsilon$

$\delta(q, \varepsilon, S) = \{(q, aSa), (q, A)\}$ $\delta(q, a, a) = \{(q, \varepsilon)\}$

$\delta(q, \varepsilon, A) = \{(q, bA), (q, \varepsilon)\}$ $\delta(q, b, b) = \{(q, \varepsilon)\}$

$S \Rightarrow aSa \overset{S \to A}{\Rightarrow} aAa \overset{A \to bA}{\Rightarrow} abAa \overset{A \to bA}{\Rightarrow} abbAa \overset{A \to \varepsilon}{\Rightarrow} abba$

$(q, abba, S) \vdash (q, abba, aSa) \vdash (q, bba, Sa) \vdash (q, bba, Aa)$

$\vdash (q, bba, bAa) \vdash (q, ba, Aa) \vdash (q, a, a) \vdash (q, \varepsilon, \varepsilon)$

b) $N(A) \subseteq L(G)$

$w \in N(A)$ $(q, w, S) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon)$

$S \to \alpha \in P$ $(q, w, S) \vdash (q, w, w_1 X \alpha_1) \vdash^* (q, w_1, X\alpha_1)$

$\alpha = w_1 X \alpha_1$ $w = w_1 w_1$ $X \to w_2 X_2 \beta_2$

$\vdash (q, w_1, w_2 X_2 \alpha_2) \vdash^* (q, w_2, X_2 \alpha_2) \vdash \dots \vdash (q, w_k, w_{k+1} \dots w_2)$

$\vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon)$

Zásobníkové automaty

Věta.

Ke každému zásobníkovému automatu A existuje bezkontextová gramatika $\mathcal{G}$ taková, že

$$N(A) = L(\mathcal{G}).$$

Deterministické zásobníkové automaty

Zásobníkový automat $A = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ je deterministický zásobníkový automat, jestliže

- Pro každé $q \in Q$, $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ a $X \in \Gamma$ je $|\delta(q, a, X)| \leq 1$.
- Jestliže pro nějaké $q \in Q$ a $X \in \Gamma$ je $\delta(q, \varepsilon, X) \neq \emptyset$, pak pro každé $a \in \Sigma$ je $\delta(q, a, X) = \emptyset$.

Deterministické zásobníkové automaty

Jazyky přijímané deterministickým zásobníkovým automatem.

Jazyk L je deterministický, jestliže je přijímán deterministickým zásobníkovým automatem koncovým stavem.

Jazyk L je bezprefixový, jestliže je přijímán deterministickým zásobníkovým automatem prázdným zásobníkem.

k $A \rightsquigarrow B$ $L(A) = N(B)$

$\delta_B(q_f, \varepsilon, X) = (q_M, \varepsilon)$ $\delta_A(q_f, q, X) \neq \emptyset$

$X \in \Gamma_A$

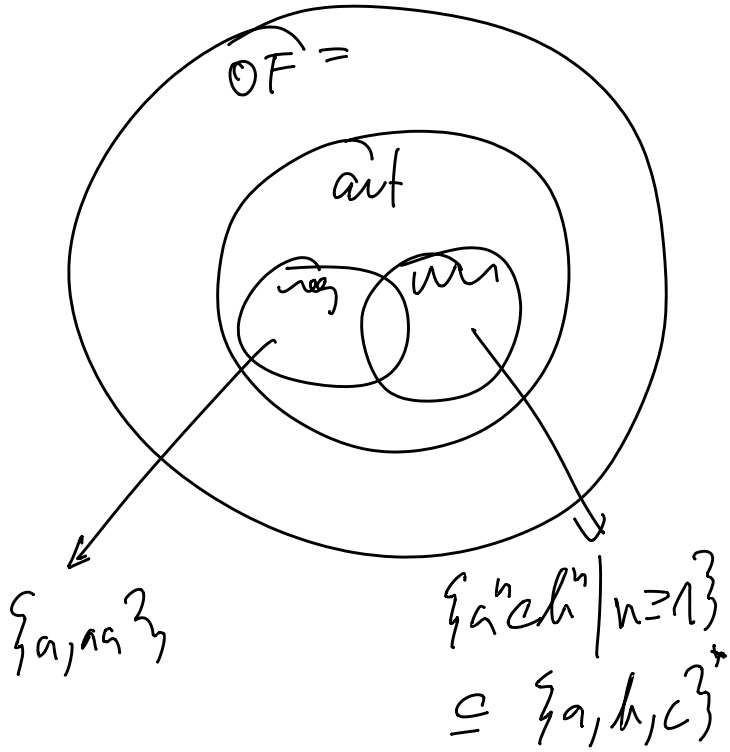
B nemá být DZA

k $A \rightsquigarrow B$ $N(A) = L(B)$ $\delta_B(q_B, \varepsilon, z_B) = (q_A, z_A z_B)$

když A je DZA, tak B je také

$q \in Q_A$

$\delta_B(q, \varepsilon, z_B) = (q_A, \dots)$



Deterministické zásobníkové automaty

Tvrzení.

Pro každý deterministický zásobníkový automat A existuje deterministický zásobníkový automat B takový, že

$$N(A) = L(B).$$

Vztah mezi třídami regulárních jazyků, bezprefixových jazyků a deterministických jazyků.

Uzávěrové vlastnosti bezkontextových jazyků

Tvrzení.

Bezkontextové jazyky jsou uzavřeny na sjednocení, zřetězení, Kleeneho operaci $\star$.

Tvrzení.

Bezkontextové jazyky **nejsou** uzavřeny na průnik.

Vlastnosti třídy CF jazyků

Věta: Třída CF jazyků je uzavřená na sjednocení, zřetězení a Kleeneho operaci

Věta: není uzavřen na průnik

$L_1 = \{a^i b^i c^i \mid i,j \geq 1\}$ $S_1 \to AB$ $A \to aAb \mid ab$
$B \to cB \mid c$

$L_2 = \{a^k b^l c^l \mid k,l \geq 1\}$ $S_2 \to CD$ $C \to aC \mid c$
$D \to bDc \mid bc$

$L_1 \cap L_2 = \{a^i b^i c^i \mid i \geq 1\}$ není CF

Věta: Třída CF není uzavřena na doplňky

Kdyby ano $\overline{L_1 \cap L_2} = \overline{L_1} \cup \overline{L_2}$ tj $L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$