Teorie jazyků a automatů— 14. týden

Marie Demlová
http://math.feld.cvut.cz/en/people/demlova

6. 1. 2025

Turingovy stroje

Chomského hiearchie

- gramatiky typu 0; rekurzivně spočetné jazyky – $\mathcal{L}_0$
- gramatiky typu 1; kontextové jazyky – $\mathcal{L}_1$
- gramatiky typu 2; bezkontextové jazyky – $\mathcal{L}_2$
- gramatiky typu 3; regulární / pravé lineární jazyky – $\mathcal{L}_3$

Turingovy stroje

Turingovy stroje

- pokusy o formalizaci pojmu algoritmus — třicátá léta minulého století
- Turingův stroj
- další formalizace — λ kalkul, částečně rekurzivní funkce, RAM

Turingovy stroje

Turingův stroj je sedmice $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$, kde

- Q je konečná množina stavů,
- Σ je konečná množina vstupních symbolů,
- Γ je konečná množina páskových symbolů, přitom $\Sigma \subset \Gamma$,
- B je prázdný symbol (též nazývaný *blank*), jedná se o páskový symbol, který není vstupním symbolem, (tj. $B \in \Gamma \setminus \Sigma$),
- δ je přechodová funkce, tj. parciální zobrazení z množiny $(Q \setminus F) \times \Gamma$ do množiny $Q \times \Gamma \times \{L, R\}$, (zde L znamená pohyb hlavy o jedno pole doleva, R znamená pohyb hlavy o jedno pole doprava),
- $q_0 \in Q$ je počáteční stav a
- $F \subseteq Q$ je množina koncových stavů.

Turingovy stroje

Příklad.
Navrhněte Turingův stroj, který přijímá jazyk

$$L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}.$$

Turingovy stroje

Konfigurace Turingova stroje

Konfigurace je

$$X_1 X_2 \ldots X_{i-1} q X_i X_{i+1} \ldots X_k.$$

Počáteční konfigurace je

$$q_0 a_1 \ldots a_n.$$

Krok Turingova stroje – I.

Turingův stroj nachází v konfiguraci $X_1\,X_2\,\ldots\,X_{i-1}\,q\,X_i\,\ldots\,X_k$, pak:
Jestliže $\delta(q, X_i) = (p, Y, R)$, pak

$$X_1\,X_2\,\ldots\,X_{i-1}\,q\,X_i\,\ldots\,X_k \vdash X_1\,X_2\,\ldots\,X_{i-1}\,Y\,p\,X_{i+1}\,\ldots\,X_k.$$

Je-li $i = k$, pak

$$X_1\,X_2\,\ldots\,q\,X_k \vdash X_1\,X_2\,\ldots\,X_{k-1}\,Y\,p\,B.$$

Krok Turingova stroje – II.

Jestliže $\delta(q, X_i) = (p, Y, L)$, pak

$$X_1\, X_2\, \ldots\, X_{i-1}\, q\, X_i\, \ldots\, X_k \vdash X_1\, X_2\, \ldots\, X_{i-2}\, p\, X_{i-1}\, Y\, X_{i+1}\, \ldots\, X_k.$$

Je-li $i = 1$, pak

$$q\, X_1\, X_2\, \ldots\, X_k \vdash p\, B\, Y\, X_2\, \ldots\, X_k.$$

Výpočet Turingova stroje je posloupnost jeho kroků, která začíná v počáteční konfiguraci.

Turingovy stroje

Slovo $w \in \Sigma^\star$ je přijato Turingovým strojem, jestliže

$$q_0\, w \vdash^\star \alpha q \beta \quad \text{pro nějaké} \quad q \in F \text{ a } \alpha, \beta \in \Gamma^\star.$$

Jazyk přijímaný Turingovým strojem je množina slov $w \in \Sigma^\star$, které Turingův stroj přijímá a značíme ho $L(M)$.

Jazyk L je typu 0 právě tehdy, když k němu existuje Turingův stroj, který ho přijímá.

Nerozhodnutelnost

Rozhodovací úlohy a jazyky

Rozhodovací úloha je úloha, kde odpověď je buď ANO, nebo NE.

Ke každé rozhodovací úloze existuje jazyk L, který se skládá z kódů všech ANO instancí.

Nerozhodnutelnost

Jazyk L je rekursivně spočetný, jestliže existuje Turingův stroj M, který tento jazyk přijímá.

Jazyk L je rekursivní, jestliže existuje Turingův stroj M, který tento jazyk přijímá a na každém slově se zastaví.

Jazykům, které nejsou rekursivní, říkáme, že jsou nerozhodnutelné. Rozhodovací úlohy, pro které instance s odpověďmi ANO tvoří nerozhodnutelný jazyk, říkáme algoritmicky neřešitelné.

Nerozhodnutelnost

Věta. Problém zastavení Turingova stroje (tzv. halting problem) je algoritmicky nerozhodnutelný).

Postův korespondenční problém (PCP)

Dány dva seznamy slov A, B nad abecedou Σ.

$$A = (w_1, w_2, \ldots, w_k), \quad B = (x_1, x_2, \ldots, x_k),$$

kde $w_i, x_i \in \Sigma^+$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Dvojice A, B má řešení, jestliže existuje posloupnost $i_1, i_2, \ldots, i_r$ indexů, tj $i_j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, taková, že

$$w_{i_1}\, w_{i_2}\, \ldots\, w_{i_r} \;=\; x_{i_1}\, x_{i_2}\, \ldots\, x_{i_r}.$$

Otázka: Existuje řešení dané instance?

Postův korespondenční problém (PCP)

Příklad 1.

Dány seznamy

	1	2	3	4	5
A	011	0	101	1010	010
B	1101	00	01	00	0

Otázka: Existuje řešení dané instance?

Postův korespondenční problém (PCP)

Příklad 2.

Dány seznamy

	1	2	3	4	5
A	11	0	101	1010	010
B	101	00	01	00	0

Otázka: Existuje řešení dané instance?

Další nerozhodnutelné problémy

1) Pro dané bezkontextové gramatiky $\mathcal{G}_1$ a $\mathcal{G}_2$ rozhodnout, zda obě generují aspoň jedno stejné slovo, tj. zda $L(\mathcal{G}_1) \cap L(\mathcal{G}_2) \neq \emptyset$.

2) Pro dané bezkontextové gramatiky $\mathcal{G}_1$ a $\mathcal{G}_2$ rozhodnout, zda přijímají stejný jazyk, tj. zda $L(\mathcal{G}_1) = L(\mathcal{G}_2)$.

3) Pro danou bezkontextovou gramatiku $\mathcal{G}_1$ rozhodnout, zda je víceznačná.

$A = (w_1, \dots, w_k) \rightsquigarrow g_A = (\{A\}, \Sigma', A, P_A)$

$B = (x_1, \dots, x_k) \rightsquigarrow$

$\Sigma' = \Sigma \cup \{a_1', a_2', \dots, a_k'\}$

$P_A : A \to w_1 A a_1 | w_2 A a_2' | \dots | w_n A a_n' | w_n a_n'$

$\dots | w_k a_k$

$A \to w_1 A a_{i_1}' | \dots | x_n B a_n' | x_n a_n' | \dots | x_{i_n} a_{i_n}'$

$B \Rightarrow^* x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_r} a_{j_r}' | \dots a_{j_1}' a_{j_2}'$

$i_1 = j_2 \quad i_2 = j_2 \dots$

$i_n = j_n \quad n = r$

$g = (\{S, A, B\}, \Sigma', S, P)$

$P = P_A \cup P_B \cup \{S \to A, S \to B\}$

Další nerozhodnutelné problémy

4) Pro danou bezkontextovou gramatiku $\mathcal{G}_1$ rozhodnout, zda přijímá všechna slova, tj. zda $L(\mathcal{G}_1) = \Sigma^\star$.

5) Pro danou bezkontextovou gramatiku $\mathcal{G}_1$ a regulární jazyk R rozhodnout, zda $R \subseteq L(\mathcal{G}_1)$.