Teorie jazyků a automatů— 3. týden

Marie Demlová
http://math.feld.cvut.cz/en/people/demlova

7. 10. 2024

DFA: $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

$q \in Q$ je dosažitelný iff existuje $w \in \Sigma^*$, že $\delta^*(q_0, w) = q$ | $w \in L(M)$ iff $\delta^*(q_0, w) \in F$

Q' dosažitelné stavy $M' = (Q', \Sigma, \delta, q_0, F \cap Q')$

Ekvivalence stavů $\sim$

Stavy $p, q \in Q$ jsou ekvivalentní, jestliže pro každé slovo $u \in \Sigma^\star$ platí

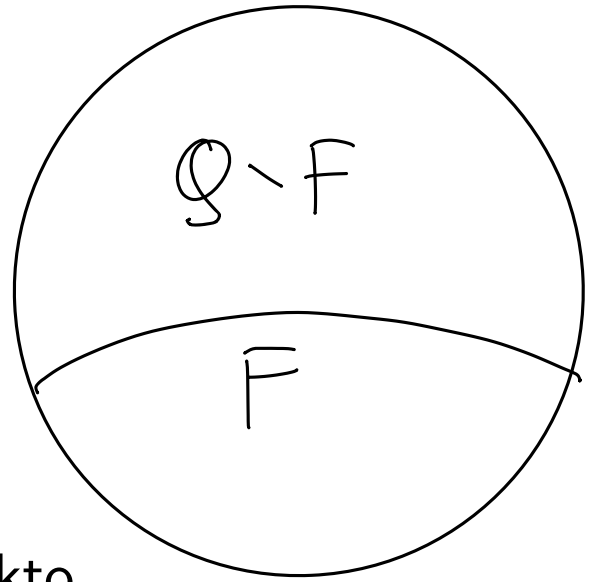
$$\delta^\star(p, u) \in F \quad \text{právě tehdy, když} \quad \delta^\star(q, u) \in F.$$

Fakt, že dva stavy p a q jsou ekvivalentní, zapisujeme $p \sim q$.

Redukovaný automat. DFA M je redukovaný, jestliže nemá nedosažitelné stavy a žádné jeho dva různé stavy nejsou ekvivalentní.

Jinými slovy, jestliže ekvivalence $\sim$ je identická ekvivalence na množině stavů Q.

Redukce DFA



Konstrukce relace $\sim$

Na Q konstruujeme $\sim_i$, kde $i = 0, 1, \ldots$:

a) $p \sim_0 q$ iff buď $p, q \in F$ nebo $p, q \notin F$.

b) Dokud $\sim_{i+1} \neq \sim_i$ konstruujeme $\sim_{i+1}$ takto
$p \sim_{i+1} q$ iff $p \sim_i q$ a pro každé $a \in \Sigma$ je $\delta(p, a) \sim_i \delta(q, a)$.

c) Položíme $\sim \; := \; \sim_i$ pro $\sim_{i+1} \; = \; \sim_i$.

udržujeme $\sim_i$ $p \sim_{i+1} q$ iff $p \sim_i q$ a máme $\delta(p,a) \sim \delta(q,a)$

Redukce DFA

Příklad. Najděte ekvivalenci $\sim$ pro konečný automat M, který je dán stavovým diagramem:

		a	b
$\rightarrow$	1	2	1
	2	2	3
$\leftarrow$	3	4	5
	4	4	3
	5	4	5

Pr.

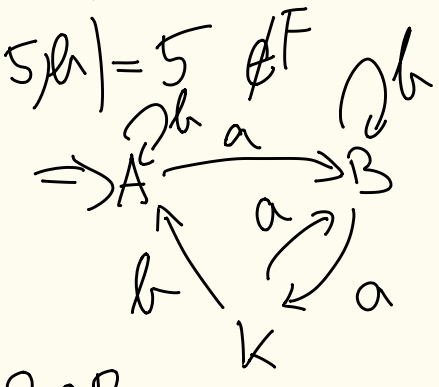
$\sim_0$: $\{3\}$ $\{1,2,4,5\}$

$\delta(1,a)=2\notin F$ $\delta(1,b)=1\notin F$

$\delta(2,a)=2\notin F$ $\delta(2,b)=3\in F$

$\delta(4,a)=4\notin F$ $\delta(4,b)=3\in F$

$\delta(5,a)=4\notin F$ $\delta(5,b)=5\notin F$



$\sim_1$: $K=\{3\}$ $A=\{1,5\}$ $B=\{2,4\}$

$\delta(1,a)=2\in B$ $\delta(2,a)=2\in B$

$\delta(5,a)=4\in B$ $\delta(4,a)=4\in B$

$\delta(1,b)=1\in A$ $\delta(2,b)=3\in K$

$\delta(5,b)=5\in A$ $\delta(4,b)=3\in K$

$\sim_2 = \sim_1$

	a	b	$\sim_0$	a	b	$\sim_1$	a	b
⇒1	2	1	0	0	0	0	A	0
2	2	3	0	0	K	A	A	K
⇐3	4	5	K	0	0	K	A	0
4	4	3	0	0	K	A	A	K
5	4	5	0	0	0	0	A	0

$\sim_1 = \sim_2$

Df. $\boxed{\sim_i = \sim_{i+1}}$, pak $\sim_{i+k} = \sim_i$ $\forall k \geq 0$

$p \sim_{i+2} q$ iff $p \sim_{i+1} q$ a $\forall a \in \Sigma$ $\delta(p,a) \sim_{i+1} \delta(q,a)$

iff

$p \sim_i q$

$\delta(p,a) \sim_i \delta(q,a)$

$p \sim_{i+1} q$ iff $p \sim_i q$

Redukce DFA

Tvrzení.

Platí

$$\sim_0 \supseteq \sim_1 \supseteq \ldots \supseteq \sim_i \supseteq \ldots$$

Navíc, existuje k že $\sim_k = \sim_{k+1}$. Pak pro každé $j \geq 1$ platí $\sim_k = \sim_{k+j}$.

Tvrzení.

Pro relace $\sim_i$ platí $p \sim_i q$ iff pro každé slovo u délky menší nebo rovné i je $\delta^\star(p, u) \in F$ iff $\delta^\star(q, u) \in F$.

Indukce podle i

Z.h. $i=0$ $p \sim_0 q$ iff $p,q \in F$ nebo $p,q \notin F$

$$\delta^*(p,\varepsilon)=p \quad \delta^*(q,\varepsilon)=q$$

I.h. Předp., že $p \sim_i q$ iff $\forall u \in \Sigma^*$, $|u| \leq i$ je $\delta^*(p,u) \in F$ iff $\delta^*(q,u) \in F$ $\quad |u| \leq 0 \Rightarrow u = \varepsilon$

1) Ukažme $p \sim_{i+1} q$ z def. $p \sim_i q$ a $\delta(p,a) \sim_i \delta(q,a)$ $\forall a \in \Sigma$

$|u| \leq i+1$ $\begin{cases} |u| \leq i & \text{z ind. předp. } \delta^*(p,u) \in F \text{ iff } \delta^*(q,u) \in F \\ |u| = i+1 & u = av,\ |v| = i \quad \delta^*(p,av) = \delta^*(\delta(p,a),v) \in F \\ & \text{iff } \delta^*(q,av) = \delta^*(\delta(q,a),v) \in F \end{cases}$

2) Předp., že indukce pro p',q' platí $\delta^*(p',u) \in F$ iff $\delta^*(q',u) \in F$ pro $|u| \leq i$, tzn $p' \sim_i q'$

Vezměme p,q, že $\delta^*(p,v) \in F$ iff $\delta^*(p,v) \in F$ iff $\delta^*(q,v) \in F$ $\forall |v| \leq i+1$. Je-li $|u| \leq i$, tzn $|u|$ závisí z ind. předp.

$p \sim_i q$

$|u| \leq i$ $\delta^*(p,au) = \delta^*(\delta(p,a),u) \in F$ iff $\delta^*(\delta(q,a),u)$

$|au| \leq i+1$ $= \delta^*(q,au) \in F$ tj $\delta(p,a) \sim_i \delta(q,a)$ $\forall a \in \Sigma$

Redukce DFA

Algoritmus redukce.

Je dán DFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.

1. Zkonstruujeme množinu Q' všech dosažitelných stavů automatu M.
2. Zkonstruujeme rozklady R_i ekvivalencí $\sim_i$ pro M'. Končíme když $\sim_i = \sim_{i+1}$. Pak $\sim = \sim_i$.
3. Označme $[q]_\sim$ třídu ekvivalence $\sim$ obsahující stav q. Pak $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$, kde
   - $Q_1 := \{[q]_\sim \mid q \in Q'\}$,
   - $q_1 := [q_0]_\sim$,
   - $\delta_1([q]_\sim, a) = [\delta(q, a)]_\sim$,
   - $F_1 = \{[q]_\sim \mid \text{ kde } F \cap [q]_\sim \neq \emptyset\}$.

Připomeňme,že dva automaty nazýváme je ekvivalentní právě tehdy, když přijímají stejný jazyk,.

Věta.
Automat M i k němu redukovaný automat M_1 přijímají stejný jazyk, tj. jsou ekvivalentní.

Isomorfní automaty.

DFA $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ a $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$ jsou *isomorfní*, jestliže existuje bijekce $\varphi\colon Q_1 \to Q_2$ že

- $\varphi(q_1) = q_2$,
- $\varphi(F_1) = F_2$,
- $\varphi(\delta_1(q, a)) = \delta_2(\varphi(q), a)$ pro každé $q \in Q_1$ a $a \in \Sigma$.

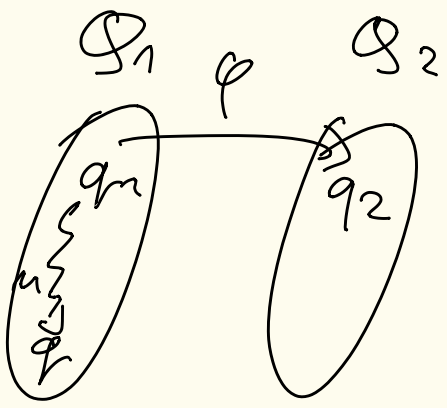
Věta.

DFA M_1 a M_2 přijímají stejný jazyk (tj. jsou ekvivalentní) právě tehdy, když jejich odpovídající redukované automaty jsou isomorfní.

$M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_{01}, F_1)$ $M_1 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_{02}, F_2)$

$\varphi : Q_1 \longrightarrow Q_2$ bijekce $\varphi(q_{01} = q_{02})$ $\varphi(F_1) = \varphi(F_2)$

$\varphi(\delta_1(p,a)) = \delta_2(\varphi(p), a)$



$L(M_1) = L(M_2)$

M_1^R, M_2^R $M_i^R = (Q_i, \Sigma, \delta_i, q_{0i}, F_i)$ $i = 1,2$

$\varphi : Q_1 \longrightarrow Q_2$ $\varphi(q_{01}) = q_{02}$

$q \in Q_1$ Je $a \in \Sigma^*$ $\delta^*(q_{01}, u) = q$

$\varphi(\delta_1^*(q_{01}, u)) = \varphi(q) = \delta_2^*(q_{02}, u) = \delta_2^*(\varphi(q_{01}), u)$

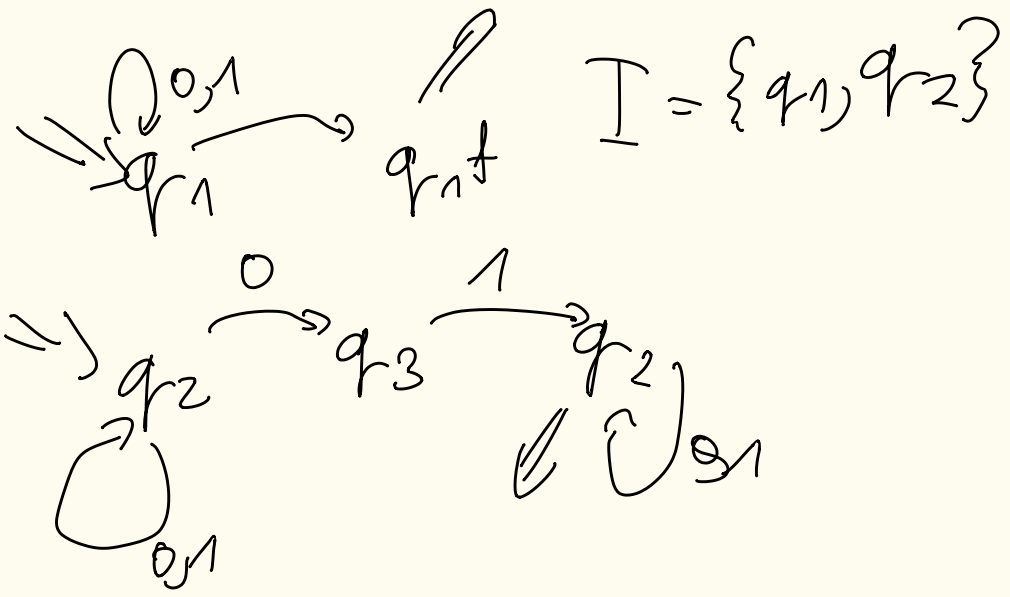
φ je dobře definované

$NFA = (Q, \Sigma, \delta, I, F)$

↓ nepřázdná množina počátečních stavů

$\delta : Q \times \Sigma \longrightarrow P(Q)$ $P(Q)$ množina všech podmnožin Q

$L = \{w \mid w$ obsahuje 01 nebo končí $1\}$



Nedeterministické automaty – NFA

NFA je $(Q, \Sigma, \delta, I, F)$, kde

- Q je konečná neprázdná množina stavů,
- Σ je konečná neprázdná množina vstupů,
- δ je přechodová funkce, kde

$$\delta \colon Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q),$$

  ($\mathcal{P}(Q)$ je množina všech podmnožin množiny stavů Q).
- $I \subseteq Q$ je neprázdná množina počátečních stavů,
- $F \subseteq Q$ je množina koncových stavů.

Nedeterministické automaty – NFA

Stavový diagram NFA je orientovaný ohodnocený graf, kde

- vrcholy jsou stavy,
- z q vede hrana ohodnocená $a \in \Sigma$ do p iff $p \in \delta(q, a)$,
- jsou vyznačeny počáteční i koncové stavy.

Značení: Pro množinu stavů $X \subseteq Q$ a $a \in \Sigma$ položíme

$$\delta(X, a) = \bigcup \{\delta(q, a) \mid q \in X\}.$$

$\delta(X,a) \quad \bigcup_{q \in X} \delta(q,a) \quad M = (Q, \Sigma, \delta, I, F) \quad \delta^* : Q \times \Sigma^* \to P(Q)$

$\delta^*(q, \varepsilon) = \{q\} \quad \delta^*(q, wa) = \delta(\delta^*(q, w), a)$

Př.: $\delta^*(q_2, 110)$ $\delta^*(q_2, 1) = \{q_2\}$ $\delta^*(q_2, 11) = \delta(\{q_2\}, 1)$

$= \{q_2\}$

$\delta^*(\{q_2\}, 110) = \{q_2, q_3\}$

$\delta^*(q, w) = \{p \mid$ ex. sled ohodnocení w z vrcholu $q\}$

$w \in L(M)$ iff $\underset{\text{ex. } q_0 \in I}{} \delta^*(q_0, w) \cap F \neq \emptyset$ iff existuje sled

z některého $q_0 \in I$ označený w končící v F

Nedeterministické automaty – NFA

Rozšířená přechodová funkce

Dán NFA $(Q, \Sigma, \delta, I, F)$. *Rozšířená přechodová funkce* $\delta^\star \colon Q \times \Sigma^\star \to \mathcal{P}(Q)$ je definována:

1. $\delta^\star(q, \varepsilon) = \{q\}$, pro všechna $q \in Q$,
2. $\delta^\star(q, ua) = \delta(\delta^\star(q, u), a)$ pro všechna $q \in Q$, $a \in \Sigma$, $u \in \Sigma^\star$.

Pozorování. Pro NFA $M = (Q, \Sigma, \delta, I, F)$, stav q a každé slovo $w \in \Sigma^\star$ je ekvivalentní:

1. existuje orientovaný sled ve stavovém diagramu z q do p označený slovem w.
2. $p \in \delta^\star(q, w)$.

Nedeterministické automaty – NFA

Slovo přijímané NFA, jazyk přijímaný NFA.

NFA $M = (Q, \Sigma, \delta, I, F)$ přijímá slovo $w \in \Sigma^\star$, iff pro nějaký z $q_0 \in I$ platí $\delta^\star(q_0, w) \cap F \neq \emptyset$.

Jazyk $L(M)$ přijímaný NFA M se skládá z právě všech slov, které jsou přijímány M.

Nedeterministické automaty – NFA

Tvrzení.

Ke každému nedeterministickému automatu M existuje deterministický automat $\widehat{M}$, který přijímá stejný jazyk; tj.

$$L(M) = L(\widehat{M}).$$

Nedeterministické automaty – NFA

Podmnožinová konstrukce.

Máme $M = (Q, \Sigma, \delta, I, F)$. Definujeme DFA $\widehat{M} = (\widehat{Q}, \Sigma, \widehat{\delta}, q_0, \widehat{F})$ takto:

- $\widehat{Q}$ je množina všech podmnožin množiny Q;
- $q_0 = I$;
- $\widehat{F}$ se skládá z těch podmnožin Q, které obsahují aspoň jeden koncový stav;
- $\widehat{\delta}(X, a)$ je množina těch stavů, do kterých vede hrana označená a z některého stavu množiny X.

Nedeterministické automaty – NFA

Modifikace podmnožinové konstrukce

Hledáme jen dosažitelné stavy.

1. $Q := \{I\}$; $A := \{I\}$;
2. `if` $A \neq \emptyset$ `do` $B := \emptyset$;
   `for all` $X \in A$ `do`
   `for all` $a \in \Sigma$ `do` $\widehat{\delta}(X, a) := \delta(X, a)$;
   `if` $\delta(X, a) \notin Q$ `then` $B := B \cup \{\delta(X, a)\}$;
3. `if` $B \neq \emptyset$ `do` $Q := Q \cup B$; $A := B$ `go to 2`
4. $\widehat{q_0} := I$; $\widehat{Q} := Q$; $\widehat{F} := \{X \in \widehat{Q} \mid X \cap F \neq \emptyset\}$;
5. `return` $\widehat{M} = (\widehat{Q}, \Sigma, \widehat{q_0}, \widehat{\delta}, \widehat{F})$

Nedeterministické automaty – NFA

Příklad.
Je dán NFA tabulkou

		0	1
$\rightarrow$	p	$\{p, q\}$	$\{p\}$
	q	$\{r, s\}$	$\{t\}$
	r	$\{p, r\}$	$\{t\}$
$\leftarrow$	s	$\emptyset$	$\emptyset$
$\leftarrow$	t	$\emptyset$	$\emptyset$

Najděte DFA $\widehat{M}$, který přijímá stejný jazyk.

Nedeterministické automaty – NFA

Věta.

Jazyk L je přijímán nějakým NFA právě tehdy, když existuje DFA M_1 takový, že

$$L = L(M_1).$$