Teorie jazyků a automatů— 4. týden

Marie Demlová
http://math.feld.cvut.cz/en/people/demlova

14. 10. 2024

Nedeterministické automaty – NFA

$w \in L(M)$ iff $\delta^*(q_0, w) \cap F \neq \emptyset$ iff ve stavovém
$\exists q_0 \quad q_0 \in I$ diag. ex. sled hran z
w z q_0 do $p \in F$

Tvrzení.

Ke každému nedeterministickému automatu M existuje deterministický automat $\hat{M}$, který přijímá stejný jazyk; tj.

$$L(M) = L(\hat{M}).$$

NFA $M = (Q, \Sigma, \delta, I, F)$ I mn. poč. stavů $I \subseteq Q$

$\delta \quad Q \times \Sigma \longrightarrow \mathcal{P}(Q)$

$\delta^*(q, \varepsilon) = \{q\}$

$\delta^*(q, wa) = \bigcup_{p \in \delta^*(q,w)} \delta(p, a)$

$p \in \delta^*(q, w)$ iff existuje sled ve stavovém diagramu z q do p označený w

Podmnožinová konstrukce

$NFA = (Q, \Sigma, \delta, \underline{I}, F) \rightsquigarrow \hat{M} = (\hat{Q}, \Sigma, \hat{\delta}, \hat{q_0}, \hat{F})$

$\hat{Q} = P(Q)$

$\underline{I} \in \hat{Q} \qquad \hat{q_0} = \underline{I}$

$\hat{\delta}(X, a) = \bigcup_{p \in X} \delta(p, a) \in \hat{Q}$

$\hat{F} = \{X \mid X \cap F \neq \emptyset\}$

Nedeterministické automaty – NFA

Podmnožinová konstrukce.

Máme $M = (Q, \Sigma, \delta, I, F)$. Definujeme DFA $\widehat{M} = (\widehat{Q}, \Sigma, \widehat{\delta}, q_0, \widehat{F})$ takto:

- $\widehat{Q}$ je množina všech podmnožin množiny Q;
- $q_0 = I$;
- $\widehat{F}$ se skládá z těch podmnožin Q, které obsahují aspoň jeden koncový stav;
- $\widehat{\delta}(X, a)$ je množina těch stavů, do kterých vede hrana označená a z některého stavu množiny X.

Nedeterministické automaty – NFA

Modifikace podmnožinové konstrukce

Hledáme jen dosažitelné stavy.

1. $Q := \{I\}$; $A := \{I\}$;
2. `if` $A \neq \emptyset$ `do` $B := \emptyset$;
   `for all` $X \in A$ `do`
   `for all` $a \in \Sigma$ `do` $\widehat{\delta}(X, a) := \delta(X, a)$;
   `if` $\delta(X, a) \notin Q$ `then` $B := B \cup \{\delta(X, a)\}$;
3. `if` $B \neq \emptyset$ `do` $Q := Q \cup B$; $A := B$ `go to 2`
4. $\widehat{q_0} := I$; $\widehat{Q} := Q$; $\widehat{F} := \{X \in \widehat{Q} \mid X \cap F \neq \emptyset\}$;
5. `return` $\widehat{M} = (\widehat{Q}, \Sigma, \widehat{q_0}, \widehat{\delta}, \widehat{F})$

Nedeterministické automaty – NFA

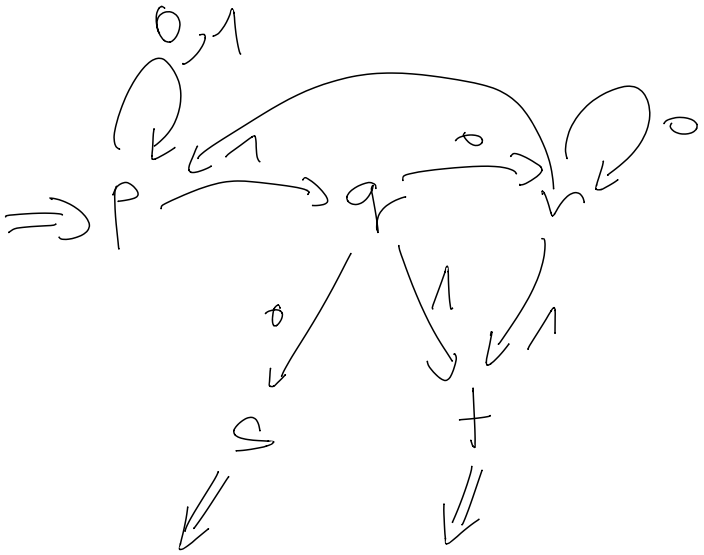
Příklad.
Je dán NFA tabulkou

		0	1
$\rightarrow$	p	$\{p, q\}$	$\{p\}$
	q	$\{r, s\}$	$\{t\}$
	r	$\{p, r\}$	$\{t\}$
$\leftarrow$	s	$\emptyset$	$\emptyset$
$\leftarrow$	t	$\emptyset$	$\emptyset$

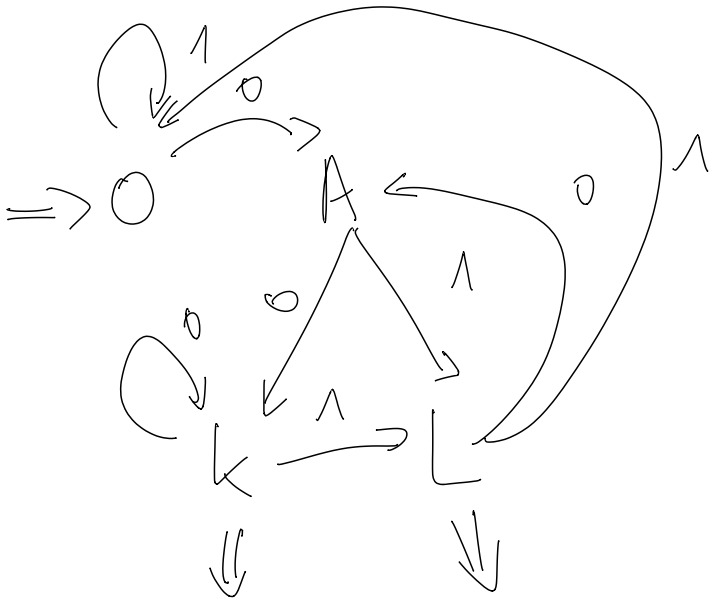
Najděte DFA $\widehat{M}$, který přijímá stejný jazyk.

NFA

	0	1
⇒p	p,q	p
q	r,s	t
r	p,r	t
⇐s	∅	∅
⇐t	∅	∅



	0	1	∼0	0	1	∼1	0 1
⇒p	p,q	p	0	0	0	0	A 0
p,q	p,q,r,s	p,t	0	K	K	A	K L
⇐p,q,r,s	p,q,r,s	p,t	K	K	K	K	K L
⇐p,t	p,q	p	K	0	0	L	A 0



Nedeterministické automaty – NFA

Věta.

Jazyk L je přijímán nějakým NFA právě tehdy, když existuje DFA M_1 takový, že

$$L = L(M_1).$$

Nedeterministický automat s ε přechody

Nedeterministický automat s ε přechody – ε-NFA je pětice $M = (Q, \Sigma, \delta, I, F)$, kde Q, Σ, I a F mají stejný význam jako u nedeterministického automatu, a přechodová funkce δ je zobrazení

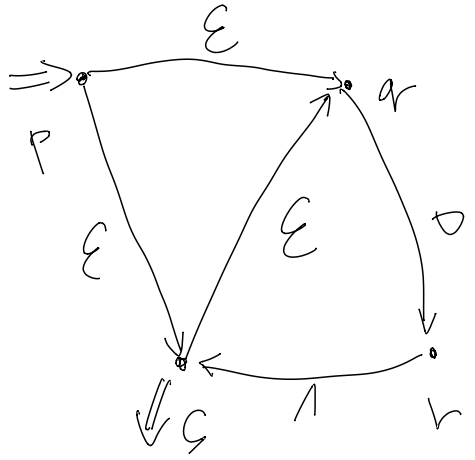
$$\delta \colon Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \to \mathcal{P}(Q).$$

Stavový diagram.

Máme navíc hrany ohodnocené ε.

	ε	0	1
$\Rightarrow p$	$\{q,s\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
q	$\emptyset$	$\{r\}$	$\emptyset$
r	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{s\}$
$\Leftarrow s$	$\{q\}$	$\emptyset$	$\emptyset$

$\Sigma = \{0,1\}$



$w = 01 = \varepsilon 01$

$\varepsilon\text{-}uz(p) = \{p,q,s\}$

$\varepsilon\text{-}uz(X)$ $\quad X \subseteq \varepsilon\text{-}uz(X)$

$X \subseteq Q$ $\quad$ je-li $p \in \varepsilon\text{-}uz(X)$, tak $\delta(p,\varepsilon) \subseteq \varepsilon\text{-}uz(X)$

$\varepsilon\text{-}uz(\varepsilon\text{-}uz(X)) = \varepsilon\text{-}uz(X)$

Rozšířená přechodová fce.

$$\delta^*(q,\varepsilon) = \varepsilon\text{-}uz(q)$$

$$\delta^*(q,wa) = \bigcup_{p \in \delta^*(q,w)} \varepsilon\text{-}uz(\delta(p,a))$$

Platí $r \in \delta^*(q,w)$ iff existuje stav z q do r obsahující w

$w \in \Sigma^*$ je přijat iff $\delta^*(I,w) \cap F \neq \emptyset$

Podmnožinová konstrukce pro ε-NFA

ε-NFA $(Q, \Sigma, \delta, I, F)$ $\xrightarrow{\text{DFA}}$ $\mathcal{Q} = \{X \mid X \subseteq Q \text{ a } \varepsilon\text{-uz}(X) = X\}$

$\hat{q_0} := \varepsilon\text{-uz}(I)$ $\quad \hat{\delta}(X, a) = \delta^*(X, a)$ $\quad \hat{F} = \{X \in \mathcal{Q} \mid X \cap F \neq \emptyset\}$

Př.

	ε	0	1
$\Rightarrow p$	$\{q, s\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
q	$\emptyset$	$\{r\}$	$\emptyset$
r	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{s\}$
$\Leftarrow s$	$\{q\}$	$\emptyset$	$\emptyset$

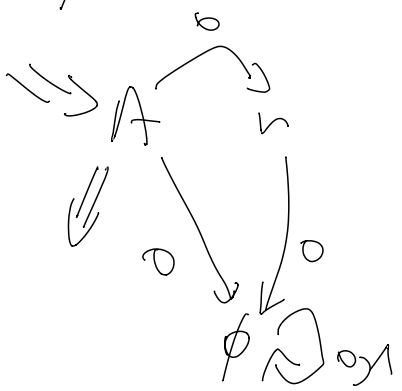
$\varepsilon\text{-uz}(p) = \{p, q, s\} = \hat{q_0}$

$\varepsilon\text{-uz}(q) = \{q\}$ $\quad \varepsilon\text{-uz}(q) = \{q\}$, $\varepsilon\text{-uz}(r) = \{r\}$

$\varepsilon\text{-uz}(s) = \{q, s\}$

	0	1
$\Rightarrow p, q, s$	r	$\emptyset$
r	$\emptyset$	q, s
q, s	r	$\emptyset$
$\Leftarrow \emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

nedůležité



$A = \{\{p, q, s\}, \{q, s\}\}$

Nedeterministický automat s ε přechody

ε uzávěr

Dán NFA s ε přechody $M = (Q, \Sigma, \delta, I, F)$. Pro množinu stavů X definujeme ε uzávěr ε-UZ(X) indukcí takto:

- $X \subseteq \varepsilon$-UZ(X);
- je-li $p \in \varepsilon$-UZ(X), pak $\delta(p, \varepsilon) \subseteq \varepsilon$-UZ$(X)$.

Má-li množina X jediný stav q, píšeme ε-UZ(q) místo ε-UZ$(\{q\})$.

Nedeterministický automat s ε přechody

Rozšířená přechodová funkce je definována indukcí takto:

- $\delta^\star(q, \varepsilon) = \varepsilon\text{-UZ}(q)$;
- $\delta^\star(q, ua) = \bigcup\{\varepsilon\text{-UZ}(\delta(p, a)) \mid p \in \delta^\star(q, u)\}$, pro $a \in \Sigma$, $u \in \Sigma^\star$.

Slovo u je přijímáno ε-NFA M, jestliže existuje $q \in I$ a $p \in F$ tak, že $p \in \delta^\star(q, u)$.

Jazyk $L(M)$ přijímaný ε-NFA M je množina všech slov, které M přijímá.

Nedeterministický automat s ε přechody

Věta.

Jazyk přijímaný libovolným ε-NFA je regulární.

Dokazuje se obdobou podmnožinové konstrukce. Pouze stavy nejsou všechny podmnožiny stavů, ale jen ty ε uzavřené.

Nedeterministický automat s ε přechody

Příklad.
Dán ε-NFA tabulkou

		ε	0	1
$\rightarrow$	p	$\{q, s\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
	q	$\emptyset$	$\{r\}$	$\emptyset$
	r	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{s\}$
$\leftarrow$	s	$\{q\}$	$\emptyset$	$\emptyset$

Najděte DFA $\widehat{M}$, který přijímá stejný jazyk.

Operace s jazyky

Dány jazyky L_1 a L_2 nad stejnou abecedou. Pak

- $L_1 \cup L_2$ je jejich sjednocení,
- $L_1 \cap L_2$ je jejich průnik,
- $\overline{L_1} = \Sigma^\star - L_1$ je doplněk jazyka L_1.

- Zřetězení jazyků L_1 a L_2 je jazyk $L_1\, L_2$ definovaný

$$L_1\, L_2 = \{uv \mid u \in L_1, v \in L_2\}.$$

Operace s jazyky

- Kleeneho operace $\star$. Je

$$L_1^\star = \{\varepsilon\} \cup L_1 \cup L_1^2 \cup L_1^3 \cup \ldots = \bigcup_{i=0}^{\infty} L_1^i.$$

kde $L_1^0 = \{\varepsilon\}$, $L_1^{i+1} = L_1^i \, L_1$ pro $i \geq 0$.

- Reverze, též obrácení $L_1^R = \{w^R \mid w \in L_1\}$.

Operace s jazyky

Pro jazyky L_1 a L_2 obecně **neplatí**:

- $(L_1 \cup L_2)^\star = L_1^\star \cup L_2^\star$.
- $(L_1 \cap L_2)^\star = L_1^\star \cap L_2^\star$.
- $L_1^\star L_2^\star = (L_1 L_2)^\star$.

Operace s jazyky

Věta.

Třída regulárních jazyků je uzavřena na následující operace: sjednocení, doplněk, průnik, zřetězení, Kleeneho operaci $\star$ a reverzi.

Přesněji, jestliže L, L_1 a L_2 jsou regulární jazyky, pak také $L_1 \cup L_2$, $\overline{L}$, $L_1 \cap L_2$, $L_1 L_2$, $L^\star$ a L^R jsou regulární jazyky.

Operace s jazyky

Součinová konstrukce.

Dány DFA $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ a $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$ takové, že $L_1 = L(M_1)$ a $L_2 = L(M_2)$. Definujeme DFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ takto:

- $Q = Q_1 \times Q_2$,
- $q_0 = (q_1, q_2)$,
- $\delta((p, q), a) = (\delta_1(p, a), \delta_2(q, a))$,
- $F = F_1 \times F_2$.

Pak $L(M) = L_1 \cap L_2$.