Teorie jazyků a automatů— 10. týden

Marie Demlová
http://math.feld.cvut.cz/en/people/demlova

25. 11. 2024

Algoritmus CYK

Označme $\mathcal{G} = (N, \Sigma, S, P)$ v Chomského normálním tvaru a $w = a_1 a_2 \dots a_k$.

Vytváříme množiny $X_{i,j}$ pro $1 \leq i \leq j \leq k$, kde

$$X_{i,j} = \{A \in N \mid A \Rightarrow_{\mathcal{G}}^{\star} a_i a_{i+1} \dots a_j\}.$$

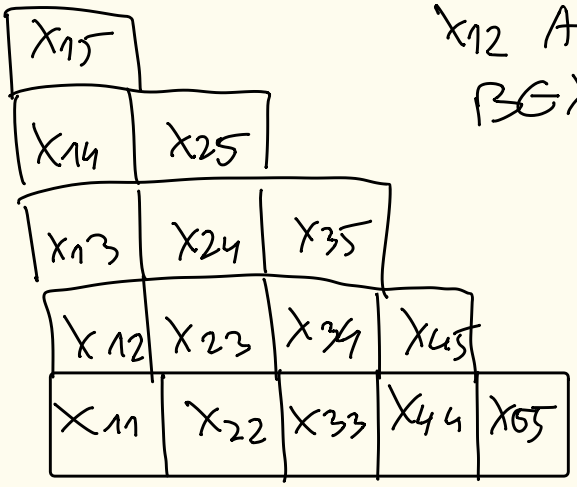
Tvrzení. Platí $w \in L(\mathcal{G})$ právě tehdy, když $S \in X_{1,k}$.

Algoritmus CYK

Příklad. Je dána gramatika $\mathcal{G}$ pravidly

$$S \to AB \mid BC$$
$$A \to BA \mid a$$
$$B \to CC \mid b$$
$$C \to AB \mid a$$

Pomocí algoritmu CYK rozhodněte, zda slovo *aabab* je generováno bezkontextovou gramatikou $\mathcal{G}$.



X_{12} $A \to B$

$B \in X_{12}$ $C \in X_{22}$

$S \to -B \mid BC$

$A \to BA \mid a$

$B \to CC \mid b$

$C \to AB \mid a$

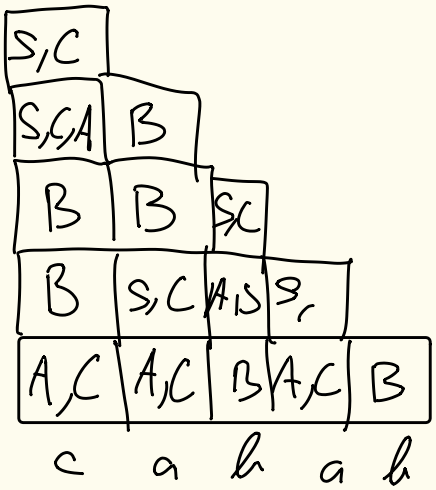
$w = c\,a\,b\,a\,b$

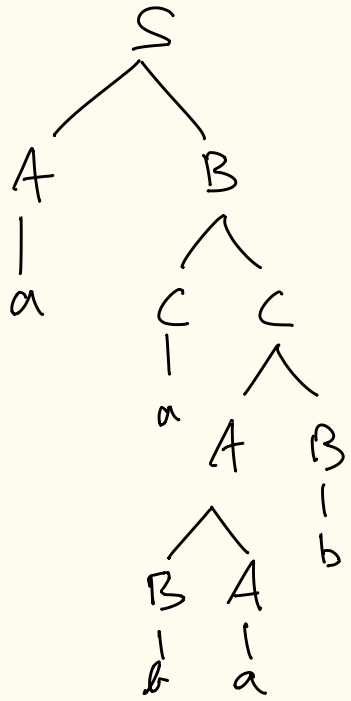
$AB \leftarrow S, C$

$BA \leftarrow A$

$BC \leftarrow S$

$CC \leftarrow B$





Zásobníkové automaty

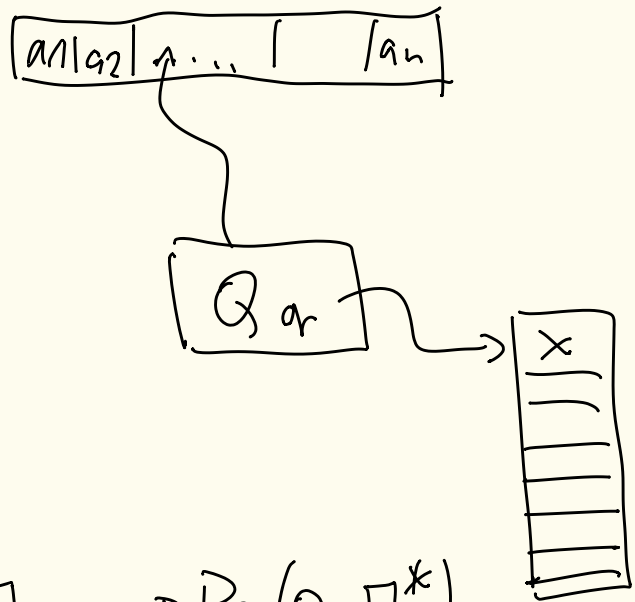
Zásobníkový automat (ZA) je sedmice $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$, kde

- Q je konečná množina stavů,
- Σ je konečná množina vstupních symbolů,
- Γ je konečná množina zásobníkových symbolů,
- δ přiřazuje každé trojici (q, a, X), $q \in Q$, $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, $X \in \Gamma$, konečnou množinu dvojic (p, α), kde $p \in Q$ a $\alpha \in \Gamma^\star$.
  Formálně:

$$\delta \colon Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \to \mathcal{P}_f(Q \times \Gamma^\star).$$

  ($\mathcal{P}_f(A)$ značí množinu všech konečných podmnožin množiny A.)
- $q_0 \in Q$ je počáteční stav,
- $Z_0 \in \Gamma$ je počáteční zásobníkový symbol a
- $F \subseteq Q$ je množina koncových stavů.

$L = \{0^n 1^n \mid n \geq 1\}$



$\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \longrightarrow P_f(Q \times \Gamma^*)$

$\delta(q, a, X) \ni (p, \gamma)$

$a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ $X \in \Gamma$

Situace ZA $(q, \underline{\underline{w}}, \gamma)$ $\underline{\text{krok}}$ $(q, aw, X\alpha) \vdash (p, w, \gamma\alpha)$

$\delta(q, a, X) \ni (p, \gamma)$

práce $S_1 \vdash^* S_2$ $S_1 \vdash^* S_1$

$S_1 \vdash R_1 \vdash R_2 \vdash \dots \vdash S_2$

počáteční situace: (q_0, w, Z_0)
nad w

$L(A) = \{w \mid (q_0, w, Z_0) \vdash^* (q_f, \varepsilon, \gamma), q_f \in F, \gamma \in \Gamma^*\}$

jazyk přijímaný koncovým stavem

$N(A) = \{w \in \Sigma^* \mid (q_0, w, Z_0) \vdash^* (p, \varepsilon, \varepsilon), p \in Q\}$

Zásobníkové automaty

Situace zásobníkového automatu

Dán ZA $A = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$. Je-li ve stavu q, na pásce je ještě nepřečtené slovo u a obsah zásobníku je slovo γ, pak popisujeme tuto situaci trojicí (q, u, γ), kde první symbol slova γ je vrchol zásobníku.

Zásobníkové automaty

Jeden krok práce zásobníkového automatu – relace $\vdash_A$.

Dán ZA $A = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$, který je v situaci $(q, au, X\gamma)$, kde $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, $X \in \Gamma$. Je-li $(p, \alpha) \in \delta(q, a, X)$, pak A přejde do situace $(p, u, \alpha\gamma)$.

Značíme $(q, au, X\gamma) \vdash_A (p, u, \alpha\gamma)$.

Píšeme též $(q, au, X\gamma) \vdash_A (p, u, \alpha\gamma)$ právě tehdy, když $(p, \alpha) \in \delta(q, a, X)$.

Relace $\vdash_A^\star$ je reflexivní a tranzitivní uzávěr relace $\vdash_A$.

Zásobníkové automaty

Jazyk přijímaný koncovým stavem je definován takto:

$$L(A) = \{u \in \Sigma^\star \mid (q_0, u, Z_0) \vdash_A^\star (p, \varepsilon, \gamma), p \in F\}.$$

Jazyk přijímaný prázdným zásobníkem $N(A)$ je definován takto:

$$N(A) = \{u \in \Sigma^\star \mid (q_0, u, Z_0) \vdash_A^\star (p, \varepsilon, \varepsilon), p \in Q\}.$$

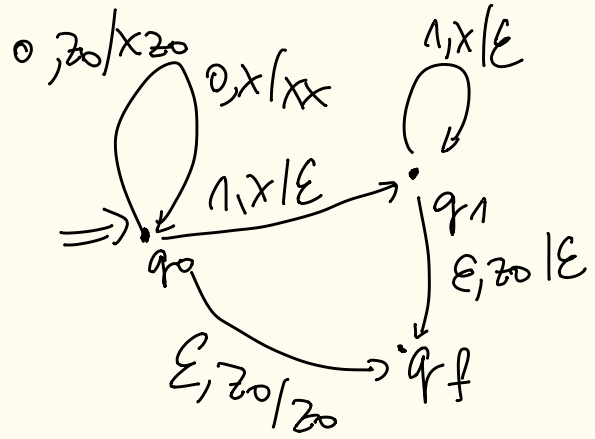
Zásobníkové automaty

Příklad.
Je dán zásobníkový automat $A = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$, kde $Q = \{q_0, q_1, q_f\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$, $\Gamma = \{Z_0, X\}$ a přechodová funkce je daná tabulkou

	$(0, Z_0)$	$(0, X)$	$(1, Z_0)$	$(1, X)$	(ε, Z_0)	(ε, X)
$\rightarrow q_0$	(q_0, XZ_0)	(q_0, XX)	–	(q_1, ε)	(q_f, Z_0)	–
q_1	–	–	–	(q_1, ε)	(q_f, ε)	–
$\leftarrow q_f$	–	–	–	–	–	–

1. Nakreslete stavový diagram zásobníkového automatu A.
2. Ukažte práci zásobníkového automatu nad slovem 0010 a slovem 0011.

Stavový diagram



$w = 0010$

$(q_0, 0010, z_0) \vdash (q_0, 010, xz_0) \vdash$ $\quad$ $\vdash (q_f, 0010, z_0)$ konec

$\vdash (q_0, 10, xxz_0) \vdash (q_1, 0, xz_0)$ konec $0010 \neq \varepsilon$

$\notin N(A)$

$u = 0011$

$(q_0, 0011, z_0) \vdash (q_0, 011, xz_0) \vdash (q_0, 11, xxz_0)$ $\quad$ $\vdash (q_f, 0011, z_0)$

$\vdash (q_1, 1, xz_0) \vdash (q_0, \varepsilon, z_0) \vdash (q_f, \varepsilon, \varepsilon)$

$L(A) = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$

$N(A) = \{0^n 1^n \mid n \geq 1\}$

Zásobníkové automaty

Tvrzení.

Ke každému zásobníkovému automatu A existuje zásobníkový automat B takový, že

$$N(A) = L(B).$$

Tvrzení.

Ke každému zásobníkovému automatu A existuje zásobníkový automat B takový, že

$$L(A) = N(B).$$