Cvičení 21. a 24. října 2024

Příklad 5.1. Dokažte že pro libovolné jazyky L_1 a L_2 nad stejnou abecedou platí $(L_1 \cup L_2)^\star = (L_1^\star L_2^\star)^\star$.

$(p+q)^* \equiv (p^* q^*)^*$

a) $(L_1 \cup L_2)^* \subseteq (L_1^* L_2^*)^*$

$w \in (L_1 \cup L_2)^*$ iff

$w = x_1 x_2 \dots x_k$

$x_i \in L_1 \cup L_2$

$x_i \in L_1$

$x_1 \dots x_{i_1} \in L_1$

$y_1 = x_1 \dots x_{i_1} \in L_1^*$

if $i_1 = k \rightarrow w \in L_1^* \{\varepsilon\} \subseteq L_1^* L_2^*$

if $i_1 < k$

$x_{i+1} \in L_2$

nejdelší podslovo $\underbrace{x_{i_1+1} \dots x_{i_2}}_{y_2} \in L_2$

$x_1 \in L_2$

x_{i_1+1} potom první L_1 je ε

b) $(L_1^* L_2^*)^* \subseteq (L_1 \cup L_2)^*$

$w \in (L_1^* L_2^*)^* = \bigcup_0^\infty (L_1^* L_2^*)^k$ $\quad L_1^* L_2^* \subseteq (L_1 \cup L_2)^*$

$x_1 \dots x_k y_1 \dots y_l$

$x_i \in L_1$ $y_j \in L_2$

lze ž $(L_1^* L_2^*)^k \subseteq (L_1 \cup L_2)^*$

tedy $(L_1^* L_2^*)^{k+1} = (L_1^* L_2^*)(L_1^* L_2^*)^k \subseteq (L_1 \cup L_2)^*$

Příklad 5.2. Napište regulární výraz, který reprezentuje jazyk L nad abecedou $\Sigma = \{0, 1\}$ (jestliže takový regulární výraz existuje), kde

a) L se skládá ze všech slov, které obsahují pouze 0. 0^*

b) L se skládá ze všech slov, které obsahují právě (přesně) jednu 1. 0^*10^*

c) L se skládá ze všech slov, které obsahují alespoň jednu 1. $0^*1(0+1)^*$

d) L se skládá ze všech slov, které obsahují alespoň dvě 1. $0^*10^*1(0+1)^*$

e) L se skládá ze všech slov, které obsahují sudý počet 1. $(0^*10^*1)^*0^*$

f) L se skládá ze všech slov, které obsahují lichý počet 1. $0^*1(0^*10^*1)^*0^*$

Odpovědi zdůvodněte.

Příklad 5.3. Jazyk L_1 je reprezentován regulárním výrazem $\mathbf{r}_1 = \mathbf{0^\star 1^\star 0^\star 1^\star 0^\star}$ a jazyk L_2 je reprezentován regulárním výrazem $\mathbf{r}_2 = (\mathbf{01} + \mathbf{10})^\star$.

a) Najděte nejkratší neprázdné slovo, které patří do průniku $L_1 \cap L_2$.

b) Najděte nejdelší neprázdné slovo, které patří do průniku $L_1 \cap L_2$.

c) Najděte nejkratší slovo, které leží v L_1, ale neleží v L_2.

d) Najděte nejkratší slovo, které neleží ve sjednocení $L_1 \cup L_2$.

Odpovědi zdůvodněte.

$r_1 = 0^*1^*0^*1^*0^*$

$r_2 = (01 + 10)^*$

a) 01 nebo 10

b) 01100110 $\longrightarrow \in L_1$ $\longrightarrow \in L_2$

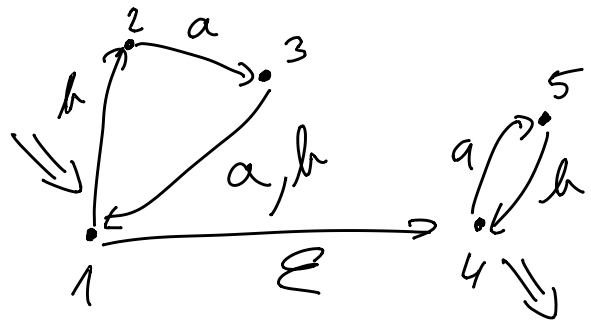
c) 0 nebo 1

d) 10101

Příklad 5.4. Je dán regulární výraz $\mathbf{r} = (\mathbf{baa} + \mathbf{bab})^\star(\mathbf{ab})^\star$. K $\mathbf{r}$ zkonstruujte redukovaný DFA, který přijímá jazyk reprezentovaný tímto regulárním výrazem.

(Návod: Postupujte dvěma způsoby; jednak obecným postupem z přednášky, jednak rozdělením na podvýrazy, pro které je možné najít NFA přímo a pak použitím konstrukcí z důkazů faktu, že třída regulárních jazyků je uzavřena na sjednoceni, zřetězení a Kleeneho operátor.)

$(baa + bab) \neq ba(a+b)$

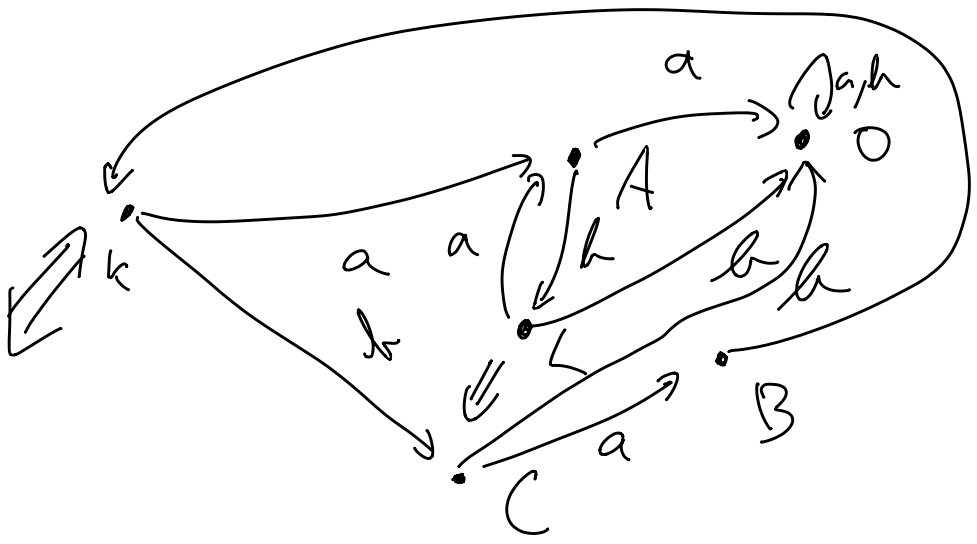


ε-NFA	ε	a	b
⇒ 1	4	∅	2
2	∅	3	∅
3	∅	1	1
⇐ 4	∅	5	∅
5	∅	∅	4

$\varepsilon\text{-uz}(1) = \{1,4\}$ $\quad \varepsilon\text{-uz}(2) = 2$ $\quad \varepsilon\text{-uz}(4) = 4$

$\varepsilon\text{-uz}(3) = 3$ $\quad \varepsilon\text{-uz}(5) = 5$

	a	b	n_0	a b	n_1	a b	n_2	a b	n_3
⇔ 1,4	5	2	K	0 0	K	A 0	K	A C	K
5	∅	4	0	0 K	A	0 K	A	0 K	A
⇐ 4	5	∅	K	0 0	K	A 0	K	A 0	L
2	3	∅	0	0 0	0	B 0	C	B 0	C
3	1,4	1,4	0	K K	B	K K	B	K K	B
∅	∅	∅	0	0 0	0	0 0	0	0 0	0



a,b

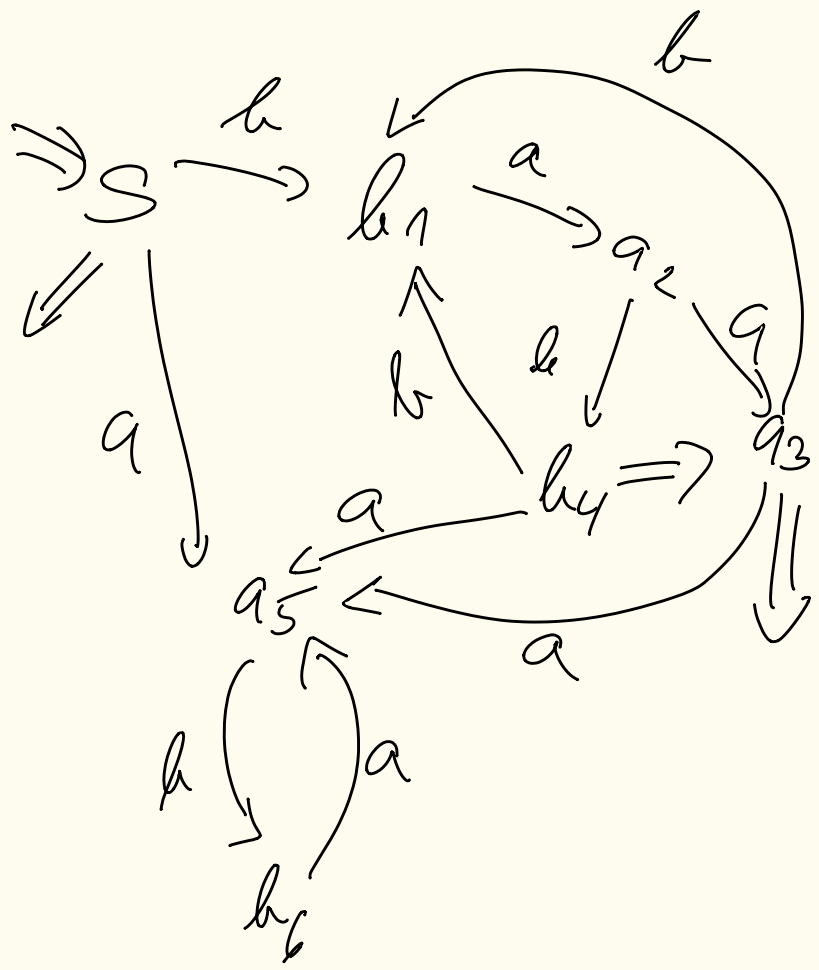
	a	b
K	A	C
A	0	L
L	A	0
C	B	0
B	K	K
0	0	0

II: $(b_1 a_2 (a_3 + b_4))^* (a_5 b_6)^*$

začátek: b_1, a_5

po stě
$b_1 : a_2$
$a_2 : a_3, b_4$
$a_3 : b_1, a_5$
$b_4 : a_1, a_5$
$a_5 : b_6$
$b_6 : a_5$

konec a_3, b_4, b_6



$\varepsilon \in L_-$

	a	b
⇔ S	a_5	b_1
a_5	$\emptyset$	b_6
b_1	a_2	$\emptyset$
a_2	a_3	b_4
⇐ b_6	a_5	$\emptyset$
⇐ a_3	a_5	b_1
⇐ b_4	a_5	b_1
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

Příklad 5.5. Je dán jazyk L nad $\Sigma = \{0, 1\}$, kde

$$L = \{w \mid w \text{ neobsahuje 11 jako podslovo}\}.$$

Navrhněte redukovaný DFA M, který přijímá L.

Pro jazyk L najděte regulární výraz, který ho reprezentuje. (Použijte úpravy grafu z přednášky.)

DFA přijímající $L = \{w \mid w \text{ neobsahuje } 11\}$

$\bar{L} = \{w \mid w \text{ obsahuje } 11\}$