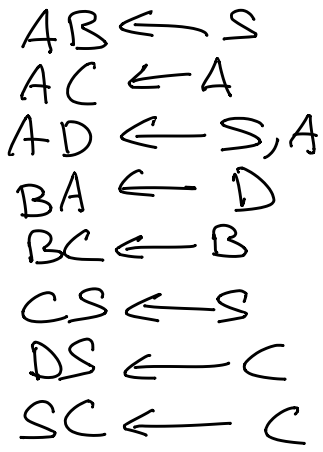
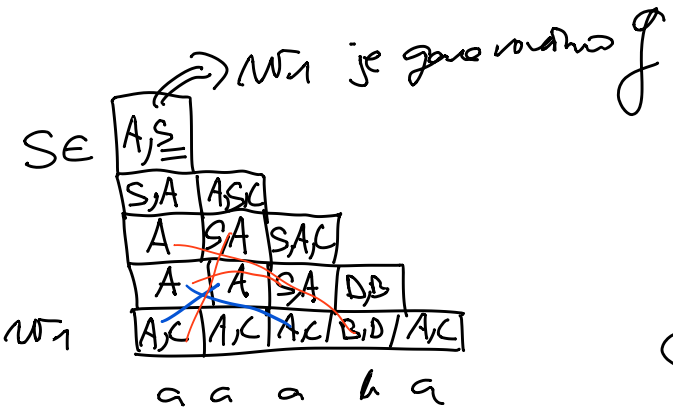
Cvičení 25. a 28. listopadu 2024

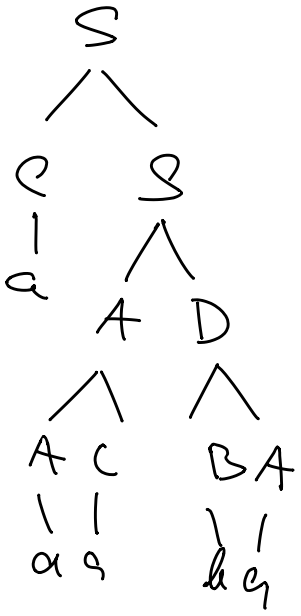
Příklad 10.1. Je dána gramatika $\mathcal{G} = (N, \Sigma, S, P)$, kde $N = \{S, A, B, C, D\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a pravidla P jsou dána

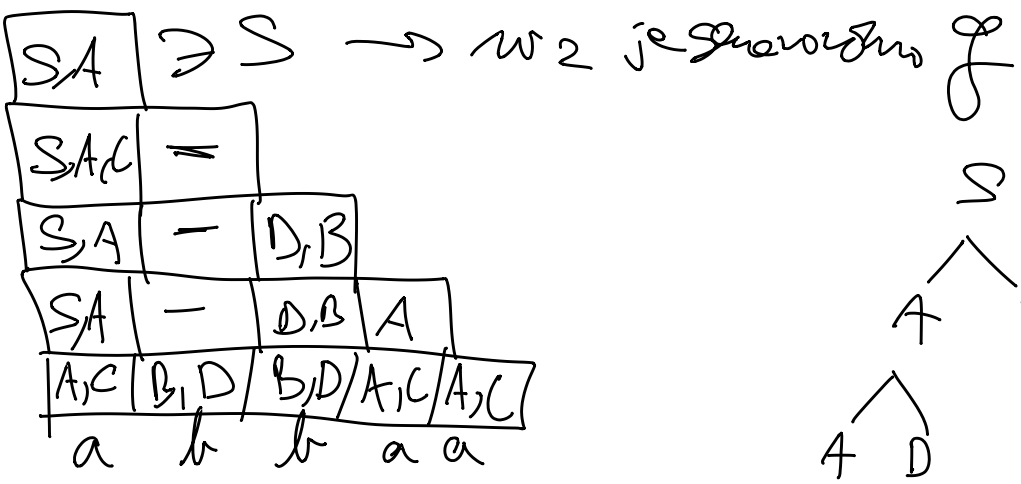
$$
\begin{aligned}
P: \quad & S \to AB \,|\, CS \,|\, AD \\
& A \to AC \,|\, AD \,|\, a \\
& B \to BC \,|\, b \\
& C \to DS \,|\, SC \,|\, a \\
& D \to BA \,|\, b
\end{aligned}
$$

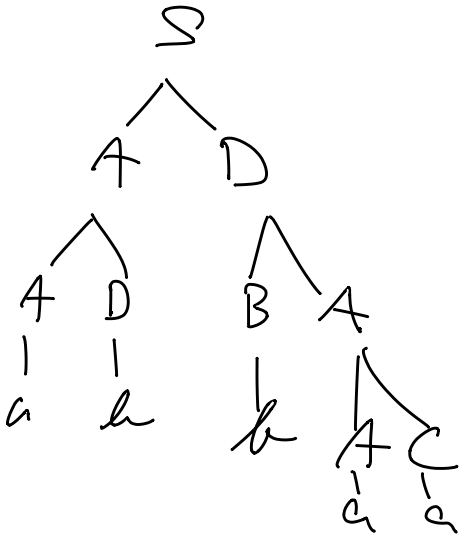
Algoritmem CYK rozhodněte, zda gramatika $\mathcal{G}$ generuje slova w_1 a w_2 kde $w_1 = aaaba$ a $w_2 = abbaa$. Pokud ano, nakreslete derivační strom a napište jemu odpovídající levou derivaci.







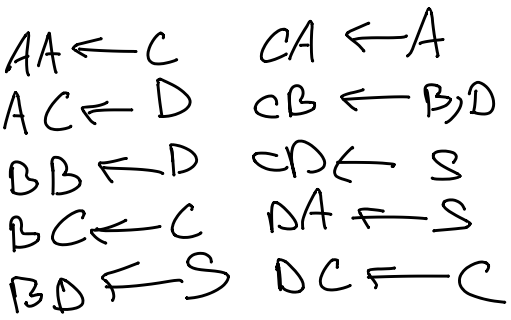


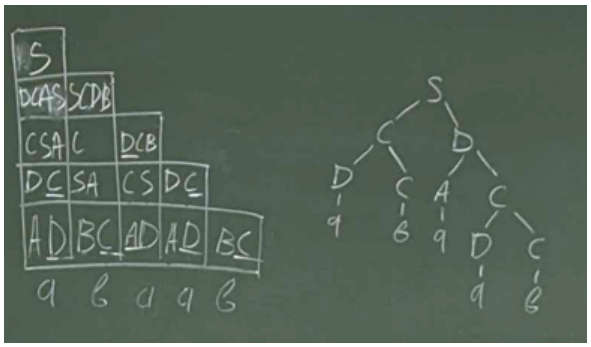


Příklad 10.2. Je dána gramatika $\mathcal{G} = (N, \Sigma, S, P)$, kde $N = \{S, A, B, C, D\}$, $\Sigma = \{a, b, \}$ a pravidla P jsou dána

$$
\begin{aligned}
P: \quad & S \to BD \,|\, CD \,|\, DA \\
& A \to CA \,|\, a \\
& B \to CB \,|\, b \\
& C \to AA \,|\, BC \,|\, DC \,|\, b \\
& D \to AC \,|\, BB \,|\, CB \,|\, a
\end{aligned}
$$

Algoritmem CYK rozhodněte, zda slovo $w_1 = abaab$ je touto gramatikou generováno. Pokud ano, nakreslete derivační strom a napište levou derivaci.





Příklad 10.3. S využitím Pumping Lemmatu ukažte, že následující jazyk není bezkontextový, kde

$$L = \{ww\,;\, w \in \{a,b\}^*\}.$$

Je-li L CF, tak existuje $m \geq 1$ takové, že každé $z \in L$, $|z| \geq m$, lze napsat $z = uvwxy$ splňující

1) $|vwx| \leq m$, 2) $vx \neq \varepsilon$, 3) $uv^i wx^i y \in L$ $\forall i \geq 0$

Kdyby $L = \{www \mid w \in \{a,b\}^*\}$ byl CF. Tak máme $m \geq 1$ s vlastností z PL.

zvolíme $z = \underbrace{a^m b^m}_{w} \underbrace{a^m b^m}_{w} \in L$ $|z| = 4m > m$

když $a^m b^m | a^m b^m$ napíšeme na 5 částí
$w_1 \quad w_2$

(I) vwx je podslovo w_1 $(4m+2) : 2$

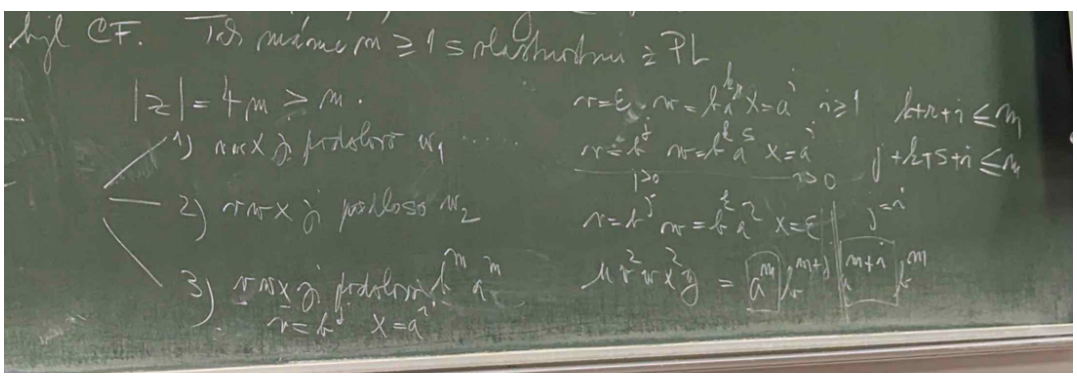
uv^2wx^2y $\boxed{a \; b}\, b | a^m b^m$ $2m+1$

(II) vwx je podslovo w_2

(III) vwx je podslovo $b^m a^m$

$v = b^j$ $x = a^i$

$i > 0$ $j > 0$



Příklad 10.4. Je dána CF gramatika $\mathcal{G} = (N, \Sigma, S, P)$, kde $N = \{S, A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a P je

$$\begin{aligned} S &\to SA \,|\, aSb \,|\, Cb \\ A &\to SC \,|\, \varepsilon \\ B &\to bAB \,|\, bS \,|\, AA \\ C &\to CB \,|\, bA \,|\, a \end{aligned}$$

Pomocí matematické indukce dokažte, že

$$A \Rightarrow_{\mathcal{G}}^{\star} S^i A C^i$$

pro všechna $i \geq 0$. Toho využijte k důkazu, že $(ab)^{i+1}(ab^3)^i$ jsou generována gramatikou $\mathcal{G}$ pro každé $i \geq 0$.

1.) Z.K. $i = 0$

$S^0 A C^0 = A$ ano $A \Rightarrow^* A$

$i \to 1$

$A \overset{A \to SC}{\Longrightarrow} SC \overset{S \to \varepsilon}{\Rightarrow} SAC$

2.) I.K. Předp. $A \Rightarrow^* S^n A C^n$. Chceme $A \Rightarrow^* S^{n+1} A C^{n+1}$

$A \overset{A \to SC}{\Longrightarrow} SC \overset{S \to SA}{\Longrightarrow} SAC \overset{\text{I.P.}}{\Longrightarrow}{}^* \underbrace{S}_{S^{n+1}} \underbrace{S^n A C^n}_{C^{n+1}} C = S^{n+1} A C^{n+1}$ □

M.)

$(ab)^{i+1}(ab^3)^i \in L(\mathcal{G})$

$S \Longrightarrow SA \Longrightarrow^* \underbrace{S}_{S^{i+1}} S^i A C^i \overset{A \to \varepsilon}{\Longrightarrow} \underbrace{S^{i+1} C^i \Rightarrow^*}_{S \to Ch \overset{C \to ab}{\Rightarrow} abh} \underbrace{(ab)^{i+1} C^i \Rightarrow}_{C \to CB \Rightarrow}$

$aB \Rightarrow abAB$

$\Rightarrow abhB \Rightarrow$

$abh^2AB \Rightarrow abh^2B \Rightarrow$

$\Rightarrow (abh)^{i+1}(abh^3)^i$

$\Rightarrow aA^3B \Rightarrow$

$aA^3B \Rightarrow aA^3AA \Rightarrow$

$aA^3A \Rightarrow aA^3$