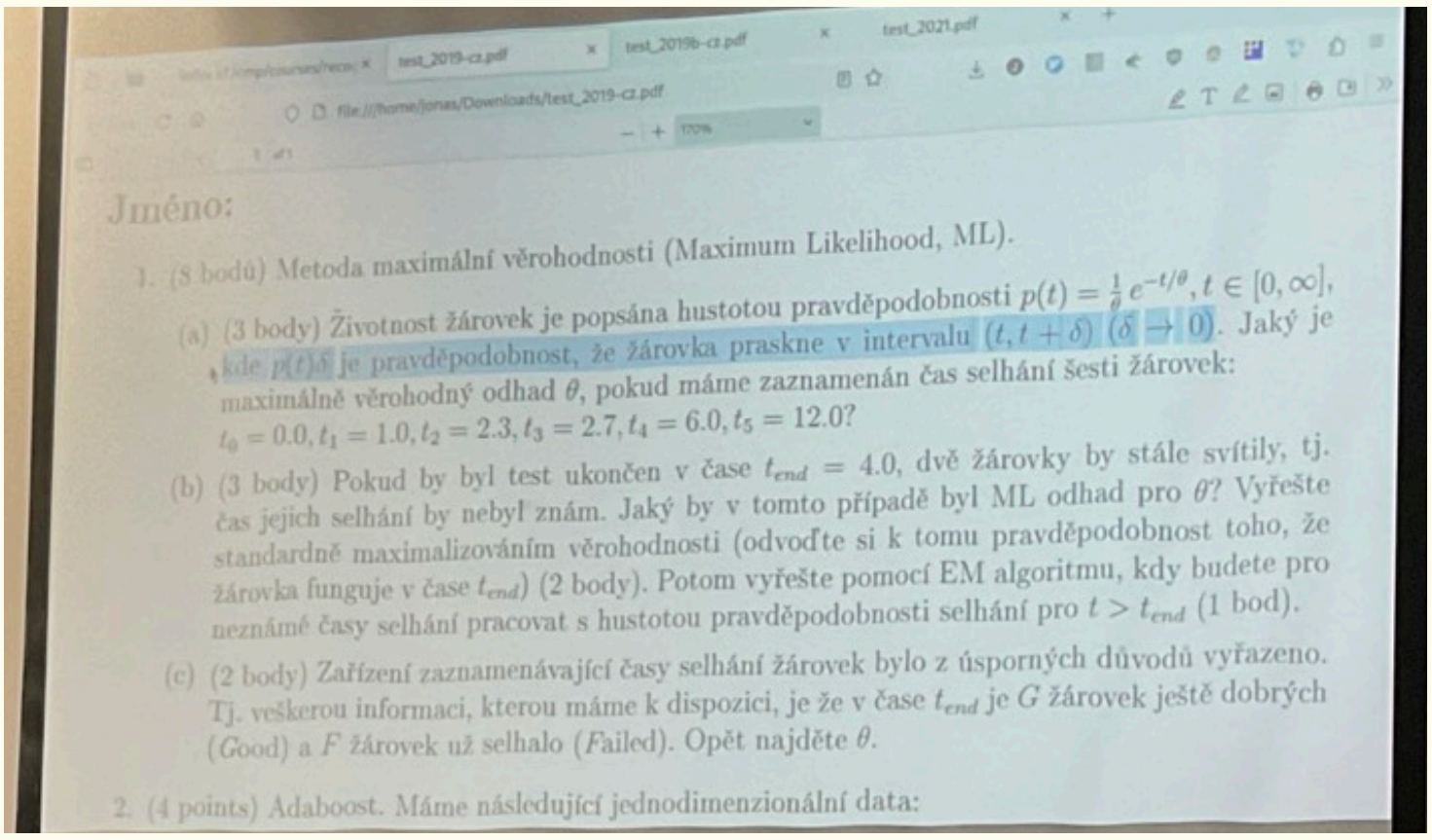
(1) ML



test_2019-cz.pdf | test_2019b-cz.pdf | test_2021.pdf

File:///home/jonas/Downloads/test_2019-cz.pdf

Jméno:

1. (8 bodů) Metoda maximální věrohodnosti (Maximum Likelihood, ML).

   (a) (3 body) Životnost žárovek je popsána hustotou pravděpodobnosti $p(t) = \frac{1}{\theta} e^{-t/\theta}, t \in [0, \infty]$, kde $p(t)\delta$ je pravděpodobnost, že žárovka praskne v intervalu $(t, t+\delta)$ $(\delta \to 0)$. Jaký je maximálně věrohodný odhad θ, pokud máme zaznamenán čas selhání šesti žárovek: $t_0 = 0.0, t_1 = 1.0, t_2 = 2.3, t_3 = 2.7, t_4 = 6.0, t_5 = 12.0$?

   (b) (3 body) Pokud by byl test ukončen v čase $t_{end} = 4.0$, dvě žárovky by stále svítily, tj. čas jejich selhání by nebyl znám. Jaký by v tomto případě byl ML odhad pro θ? Vyřešte standardně maximalizováním věrohodnosti (odvoďte si k tomu pravděpodobnost toho, že žárovka funguje v čase t_{end}) (2 body). Potom vyřešte pomocí EM algoritmu, kdy budete pro neznámé časy selhání pracovat s hustotou pravděpodobnosti selhání pro $t > t_{end}$ (1 bod).

   (c) (2 body) Zařízení zaznamenávající časy selhání žárovek bylo z úsporných důvodů vyřazeno. Tj. veškerou informaci, kterou máme k dispozici, je že v čase t_{end} je G žárovek ještě dobrých (*Good*) a F žárovek už selhalo (*Failed*). Opět najděte θ.

2. (4 points) Adaboost. Máme následující jednodimenzionální data:

$$p(t) = \frac{1}{\theta} e^{-t/\theta}$$

$$X = \{0.0, 1.0, 2.3, 2.7, 6.0, 12.0\} \quad N = 6$$

$$L(\theta) = \prod_i p(t_i)$$

$$l(\theta) = \sum_i \log \frac{1}{\theta} - \frac{t_i}{\theta} = \sum_i -\log\theta - \frac{t_i}{\theta} = -N\log\theta - \sum_i \frac{t_i}{\theta}$$

$$\frac{\partial l}{\partial \theta} = -\frac{N}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\sum_i t_i = 0 \quad \text{ex. maximum} \quad / \theta^2$$

$$-N\theta + \sum_i t_i = 0$$

$$N\theta = \sum_i t_i \Rightarrow \theta = \frac{\sum t_i}{N} = \frac{24}{6} = \underline{\underline{4}}$$

(b) $x = \{0, 1, 2.3, 2.7, \underbrace{\text{alive@4}}_{2\times}\}$

$$p(\text{alive@}T) = \int_T^\infty p(t)\,dt \qquad \text{nebo} \quad 1 - \int_0^T p(t)\,dt$$

$$\int_T^\infty \frac{1}{\theta} e^{-t/\theta}\,dt = \frac{1}{\theta}\int_T^\infty e^{-t/\theta}\,dt = \left[-e^{-t/\theta}\right]_T^\infty = 0 \cdot t + e^{-T/\theta}$$

$$L(\theta) = \prod_i^4 p(t_i) \cdot \prod_i^2 e^{-\frac{T}{\theta}} \qquad f=4 \; g=2$$

$$\ell(\theta) = \sum_i^F \log \frac{1}{\theta} - \frac{t_i}{\theta} - \sum_i^G \frac{T}{\theta} =$$

$$= -F \log\theta - \frac{1}{\theta} \sum_i^F t_i - \frac{1}{\theta} GT$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \theta} = -\frac{F}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} \sum_i^F t_i + \frac{1}{\theta^2} GT$$

$$-F\theta + \sum_i^F t_i + GT = 0$$

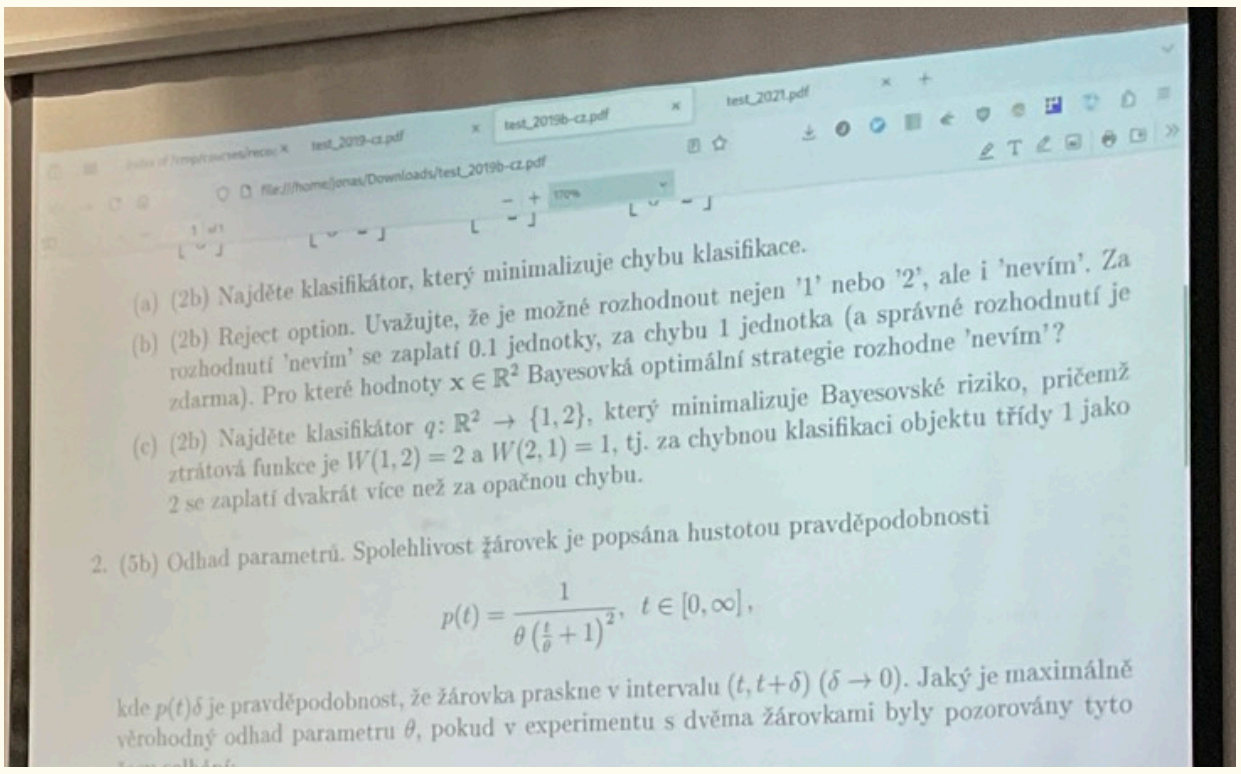
$$\theta = \frac{\sum_i^F t_i + GT}{F} = \frac{6 + 2\cdot 4}{4} = \frac{6+8}{4} = \frac{7}{2}$$

(c)

$$L(\theta) = \left(1 - e^{-\frac{T}{\theta}}\right)^F \cdot e^{-\frac{T}{\theta}^G}$$

$$\ell(\theta) \; F \cdot \left(1 - e^{-\frac{T}{\theta}}\right) + G e^{-\frac{T}{\theta}} \quad \rightsquigarrow \quad \hat{\theta} = \frac{T}{\ln \frac{F+G}{G}}$$

pokud MAP řeší se Π pravděpodobností zadaných priorem



(a) (2b) Najděte klasifikátor, který minimalizuje chybu klasifikace.

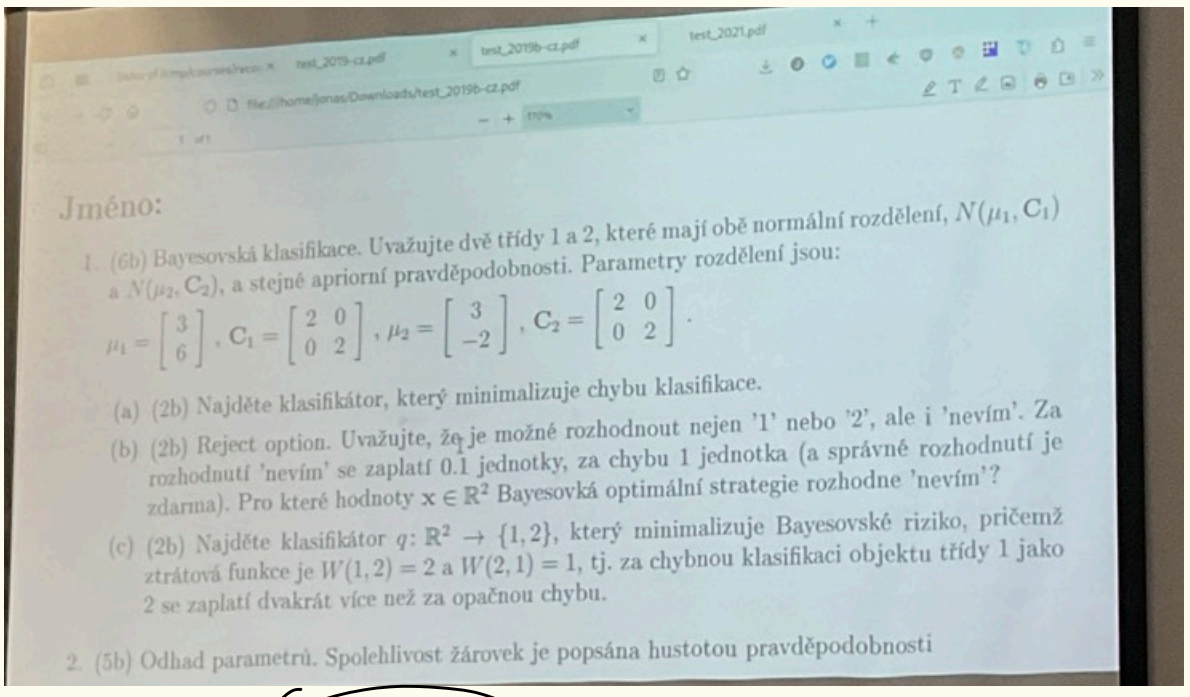
(b) (2b) Reject option. Uvažujte, že je možné rozhodnout nejen '1' nebo '2', ale i 'nevím'. Za rozhodnutí 'nevím' se zaplatí 0.1 jednotky, za chybu 1 jednotka (a správné rozhodnutí je zdarma). Pro které hodnoty $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ Bayesovská optimální strategie rozhodne 'nevím'?

(c) (2b) Najděte klasifikátor $q\colon \mathbb{R}^2 \to \{1,2\}$, který minimalizuje Bayesovské riziko, pričemž ztrátová funkce je $W(1,2) = 2$ a $W(2,1) = 1$, tj. za chybnou klasifikaci objektu třídy 1 jako 2 se zaplatí dvakrát více než za opačnou chybu.

2. (5b) Odhad parametrů. Spolehlivost žárovek je popsána hustotou pravděpodobnosti

$$p(t) = \frac{1}{\theta\left(\frac{t}{\theta}+1\right)^2}, \quad t \in [0,\infty],$$

kde $p(t)\delta$ je pravděpodobnost, že žárovka praskne v intervalu $(t, t+\delta)$ $(\delta \to 0)$. Jaký je maximálně věrohodný odhad parametru θ, pokud v experimentu s dvěma žárovkami byly pozorovány tyto



Jméno:

1. (6b) Bayesovská klasifikace. Uvažujte dvě třídy 1 a 2, které mají obě normální rozdělení, $N(\mu_1, C_1)$ a $N(\mu_2, C_2)$, a stejné apriorní pravděpodobnosti. Parametry rozdělení jsou:

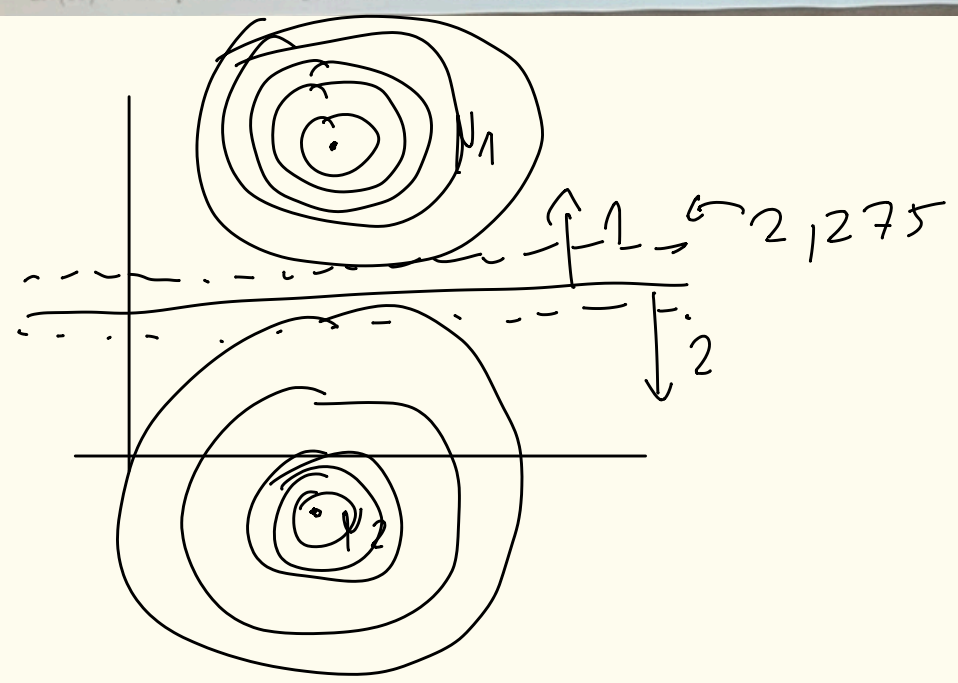
$$\mu_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}, C_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \mu_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

   (a) (2b) Najděte klasifikátor, který minimalizuje chybu klasifikace.

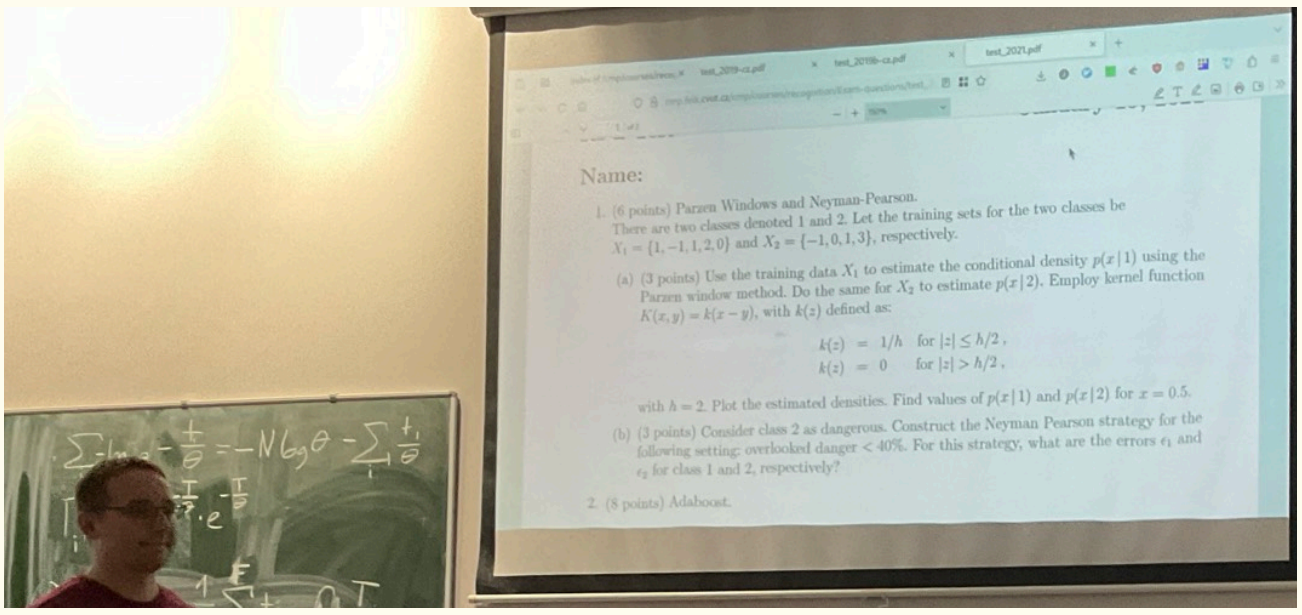
   (b) (2b) Reject option. Uvažujte, že je možné rozhodnout nejen '1' nebo '2', ale i 'nevím'. Za rozhodnutí 'nevím' se zaplatí 0.1 jednotky, za chybu 1 jednotka (a správné rozhodnutí je zdarma). Pro které hodnoty $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ Bayesovská optimální strategie rozhodne 'nevím'?

   (c) (2b) Najděte klasifikátor $q: \mathbb{R}^2 \to \{1, 2\}$, který minimalizuje Bayesovské riziko, pričemž ztrátová funkce je $W(1,2) = 2$ a $W(2,1) = 1$, tj. za chybnou klasifikaci objektu třídy 1 jako 2 se zaplatí dvakrát více než za opačnou chybu.

2. (5b) Odhad parametrů. Spolehlivost žárovek je popsána hustotou pravděpodobnosti



(c) = 1,83



Name:

1. (6 points) Parzen Windows and Neyman-Pearson.
There are two classes denoted 1 and 2. Let the training sets for the two classes be $X_1 = \{1, -1, 1, 2, 0\}$ and $X_2 = \{-1, 0, 1, 3\}$, respectively.

   (a) (3 points) Use the training data X_1 to estimate the conditional density $p(x|1)$ using the Parzen window method. Do the same for X_2 to estimate $p(x|2)$. Employ kernel function $K(x, y) = k(x - y)$, with $k(z)$ defined as:

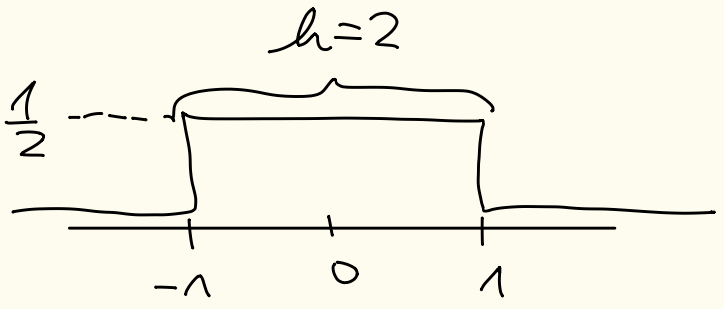
$$k(z) = 1/h \quad \text{for } |z| \leq h/2,$$
$$k(z) = 0 \quad \text{for } |z| > h/2,$$

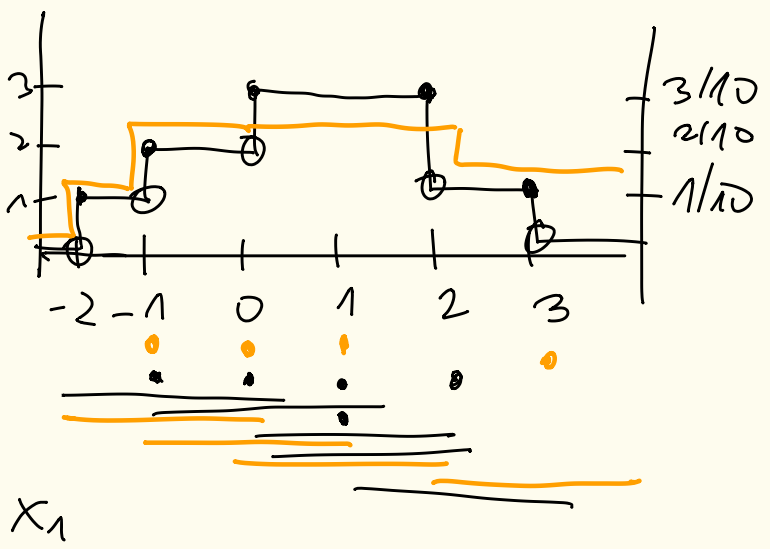
   with $h = 2$. Plot the estimated densities. Find values of $p(x|1)$ and $p(x|2)$ for $x = 0.5$.

   (b) (3 points) Consider class 2 as dangerous. Construct the Neyman Pearson strategy for the following setting: overlooked danger $< 40\%$. For this strategy, what are the errors ϵ_1 and ϵ_2 for class 1 and 2, respectively?

2. (8 points) Adaboost.

Parzen





$$p(\bar{x}) = \frac{1}{N} \sum_i K(\bar{x}, x_i)$$

x_1

x_2

find values for $p(x|1)$ $p(x|2)$ $x = 0.5$