A

1. **C** - postupujeme vyřazovací metodou: A to zjevně není, protože "natahování"nezávislost vektorů nemění, B to není protože se to dá rozepsat a vytknout a vychází, že musí být nezávislé. Obdobně postupujeme u D. Takže zbývá C.

1. **B** - zde si stačí pamatovat vzorec a vlastnost determinantů. Původní výraz se dá rozepsat následovně:

$$\det(A \cdot (-A)) = \det(A) \cdot \det(-A) = \det(A) \cdot (-1)^4 \det(A) = 3 \cdot 3$$

   Je to tedy B.

2. **D** - tady je dobré si uvědomit co musí splňovat podprostor, podmínky které nás budou hlavně zajímat jsou: uzavřenost na sčítání a existence nulového vektoru. A to není neboť můžeme například sečíst 2 singulární matice a dostat regulární matici, která už není singulární:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   B to není protože nulová matice (nulový vektor) není regulární a tedy takový prostor porušuje podmínky. C to není protože obdobně jako u A se dají sečíst dvě matice, které mají nenulový sloupec a vznikne matice se sloupcem nulovým (stejně tak neexistuje nulová matice).
   Je to tedy D.

3. **A** - je vidět, že B je nesmysl. Dobře se to dá představit například tak, že matice A "pokrývá"celou rovinu, proto existuje řešení pro $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$.
   Protože tedy determinant je nenulový, tak to znamená, že A je regulární a nemůže existovat nekonečno řešení (to vyřazuje odpověď C). No a protože je matice regulární tak musí existovat řešení pro každý vektor $\mathbb{R}^2$
   Je to tedy A.

B

Definice - stačí opsat definici z přednášky/AKLY.

Jádro - Mějme lin. zobrazení $L_1 \xrightarrow{\mathbf{f}} L_2$. Jádro zobrazení $\mathbf{f}$, $\ker(\mathbf{f})$, je poté množina všech $\mathbf{x} \in L_1$ takových, že $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{o}$. Neboli $\ker(\mathbf{f}) = \{\mathbf{x}|\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{o}\}$.

Obraz - Mějme lin. zobrazení $L_1 \xrightarrow{\mathbf{f}} L_2$. Obraz zobrazení $\mathbf{f}$, $\mathrm{im}(\mathbf{f})$, je poté množina všech $\mathbf{y} \in L_2$ takových, že existuje nějaké $\mathbf{x} \in L_1$, že $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$. Neboli $\mathrm{im}(\mathbf{f}) = \{\mathbf{y}|\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ pro nějaké $\mathbf{x}\}$.

Důkaz - zde je to jednoduché, chce se po nás ukázat, že jádro složení zobrazení f · f je podmnožina jádra zobrazení f aplikovaného pouze jednou. Je to snadné protože stačí najít protipříklad.

Můžeme například zvolit zobrazení f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a jeho matici $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Poté stačí ukázat protipříklad např. na vektoru $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Pokud aplikuji zobrazení f na tento vektor tak dostanu vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$,

přičemž $\ker(f) = span(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix})$. Pokud aplikuji f dvakrát tak dostanu vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, přičemž $\ker(f) = span(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})$. To vyvrací původní tvrzení, že $\ker(f \cdot f) \subseteq \ker(f)$.

C

V tom to příkladě stačí použít starou známou Gram-Schmidtovou metodu, vlastně to po nás zadání i vyžaduje. Jako první vektor naší ortogonalizované báze G (vektor $\overrightarrow{g_1}$) zvolím první vektor původní báze B. Tedy $\overrightarrow{g_1} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ následně stačí spočítat $\overrightarrow{g_2}, \overrightarrow{g_3}$ jako rejekce, nejprve na $span(\overrightarrow{g_1})$ a pak na $span(\overrightarrow{g_1}, \overrightarrow{g_2})$.

Vektor $\overrightarrow{g_2}$ lze tedy spočítat jako: $\overrightarrow{g_2} = \overrightarrow{b_2} - \text{proj}_{\mathbf{span}(\overrightarrow{g_1})}\, \overrightarrow{b_2}$

$$\text{Tedy } \overrightarrow{g_2} = \begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix} - \frac{\langle \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix} \rangle}{\langle \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} \rangle} \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix} - \frac{5}{5} \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$$

Dostáváme $\overrightarrow{g_2} = \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$. Teď dopočítáme $\overrightarrow{g_3}$ a to velmi obdobně.

Vektor $\overrightarrow{g_3}$ spočítáme následovně: $\overrightarrow{g_3} = \overrightarrow{b_3} - (\text{proj}_{\mathbf{span}(\overrightarrow{g_1})}\, \overrightarrow{b_3} + \text{proj}_{\mathbf{span}(\overrightarrow{g_2})}\, \overrightarrow{b_3})$

$$\overrightarrow{g_3} = \begin{pmatrix}5\\1\\3\end{pmatrix} - \left(\frac{\langle \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix}5\\1\\3\end{pmatrix} \rangle}{\langle \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} \rangle} \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{\langle \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix}5\\1\\3\end{pmatrix} \rangle}{\langle \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix} \rangle} \cdot \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix}5\\1\\3\end{pmatrix} - \left(\frac{11}{5} \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{-3}{5} \cdot \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix}5\\1\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}$$

Dostáváme $\overrightarrow{g_3} = \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}$

Hledaná ortogonální báze $G = (\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix})$

Poslední co zbývá je spočítat ortonormální báze Q. Spočítat Q je jednoduché, stačí normalizovat bázi B. To se udělá tak, že každý vektor z B vydělím jeho normou.

$$\overrightarrow{q_1} = \frac{1}{\sqrt{2^2+1^2+0}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{q_2} = \frac{1}{\sqrt{(-1)^2+2^2+0}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{q_3} = \frac{1}{\sqrt{0+0+3^2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hledaná ortonormální báze $Q = (\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$