LGR — základní grafové úlohy

Všechny grafy uvažujeme neorientované a obyčejné, pokud není řečeno jinak.

Úloha 1. Pro graf označme jako n počet jeho vrcholů, m počet jeho hran, δ minimální stupeň vrcholu v grafu, Δ maximální stupeň vrcholu v grafu. Ukažte, že platí

$$\delta \leq \frac{2m}{n} \leq \Delta.$$

Řešení. Z přednášky víme, že $\sum_{v \in V} d(v) = 2m$. Každý vrchol v má stupeň alespoň δ: $d(v) \geq \delta$. Proto $\sum_{v \in V} d(v) \geq \sum_{v \in V} \delta$. Jelikož je vrcholů n, platí $\sum_{v \in V} \delta = n\delta$. Z těchto informací již můžeme sestavit nerovnost $2m \geq n\delta$. Tedy platí $\frac{2m}{n} \geq \delta$, což je jedna z nerovností v zadání.

Druhá nerovnost se dokáže podobně:

$$2m = \sum_{v \in V} d(v) \leq \sum_{v \in V} \Delta = n\Delta,$$

a proto $\frac{2m}{n} \leq \Delta$.

Úloha 2. Graf nazveme k-regulární, pokud má každý jeho vrchol stupeň k. Ukažte, že pokud je k-regulární bipartitní graf s $k > 0$ rozdělen na části (X, Y), pak $|X| = |Y|$.

(V této úloze používáme pojem *bipartitního grafu.* Graf G nazveme bipartitním, pokud existují podmnožiny $X \subseteq V$ a $Y \subseteq V$ jeho množiny vrcholů takové, že $X \cap Y = \emptyset$ a $X \cup Y = V$, a navíc pro každou hranu grafu G platí, že jeden z jejích koncových vrcholů leží v množině X a druhý v množině Y.)

Řešení. Ať G je k-regulární ($k > 0$) bipartitní graf s „partitami“ X a Y. Jelikož každá hrana v G musí vést mezi vrcholem z X a vrcholem z Y, počet hran v G (označme ho m) je $m = k|X|$. (Z každého vrcholu v X totiž vede k hran.) Ze stejného důvodu ale také platí $m = k|Y|$. Proto $k|X| = k|Y|$. Protože $k > 0$, po vydělení získáváme $|X| = |Y|$.

Úloha 3. Ukažte, že v každé skupině dvou či více lidí se vždy najdou dva, kteří mají uvnitř dané skupiny stejný počet přátel. (Přátelství uvažujeme jako symetrický vztah.)

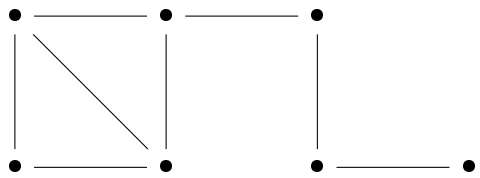
Řešení. Ať je ve skupině n lidí. Počet přátel každého jednotlivce musí být číslo mezi 0 a $n-1$. Kdyby nikdo z daných n lidí neměl stejný počet přátel, každý by musel mít jiný počet přátel. Speciálně by jeden člověk c_0 musel mít 0 přátel. Jiný člověk c_{n-1} by musel mít $n-1$ přátel. Jelikož je lidí jen n, musel by se c_{n-1}tedy přátelit se všemi, i s c_0. Ale c_0 žádné přátele nemá. To je spor. Proto jsou ve skupině alespoň dva různí lidé, kteří mají stejný počet přátel.

Úloha 4. Rozhodněte, které z následujících posloupností jsou skóre nějakého grafu.

1. $(7, 6, 5, 4, 3, 3, 2)$,
2. $(3, 3, 3, 2, 2, 2, 1)$,
3. $(6, 6, 5, 4, 3, 3, 1)$,
4. $(3, 3, 2, 2, 2, 2, 1)$.

Řešení. Postupně probereme všechny posloupnosti.

1. Tato posloupnost není skóre. Daný graf by musel obsahovat 7 vrcholů a současně vrchol stupně 7, což v obyčejném grafu nemůže nastat.
2. Tato posloupnost je skóre. Přesvědčte se např. pomocí tohoto grafu:



3. Tato posloupnost není skóre. Daný graf by musel obsahovat 7 vrcholů a současně dva vrcholy stupně 6, což znamená, že ze dvou různých vrcholů by musely vést hrany do všech ostatních vrcholů. Pak by ale v grafu nemohl být vrchol stupně 1.

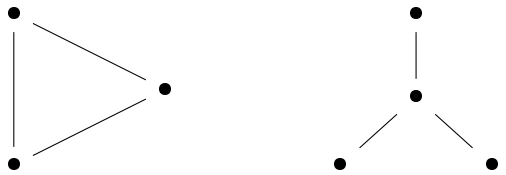
4. Tato posloupnost není skóre. Každý graf musí obsahovat sudý počet vrcholů lichého stupně.

Úloha 5. *Hranový graf* grafu G je graf $edge(G)$, jehož vrcholy jsou hrany grafu G, a dva vrcholy jsou spojeny hranou právě tehdy, když byly v grafu G sousedními hranami.

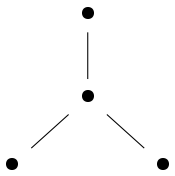
1. Je předchozí definice zcela korektní? Existuje hranový graf pro libovolný graf G?
2. Existují dva různé grafy s totožným hranovým grafem?
3. Je každý graf hranovým grafem nějakého grafu?
4. Kolik má hranový graf grafu G hran?

Řešení.

1. Pro graf G bez hran by $edge(G)$ neměl žádné vrcholy, a pro nás graf vždy musí mít alespoň jeden vrchol.
2. Ano. Příkladem jsou tyto dva grafy:



3. Ne. Příkladem je tento graf:



4. Díky každému vrcholu v z grafu G bude do grafu $edge(G)$ přidáno $\frac{d(v)\cdot(d(v)-1)}{2}$ hran. Celkem tedy bude v $edge(G)$

$$\sum_{v \in V} \frac{d(v) \cdot (d(v) - 1)}{2}$$

hran.

Úloha 6. Ukažte, že když v grafu G existuje sled z vrcholu u do vrcholu v, pak v G existuje i cesta z u do v. (Už bylo dokázáno na přednášce či cvičení.)

Řešení. Důkaz povedeme silnou indukcí podle délky sledu. To znamená:

Základní krok Ukážeme, že tvrzení platí pro sledy délky 0.

Silný indukční krok Ukážeme, že pokud tvrzení platí pro sledy délky 0 až k (což je takzvaný silný indukční předpoklad), pak tvrzení platí i pro sledy délky $k + 1$.

Silná indukce Princip silné indukce pak říká, že tvrzení platí pro všechny sledy.

V našem konkrétním příkladu vypadá důkaz takto.

Základní krok Nechť s je sled z vrcholu u do vrcholu v délky 0. To znamená, že s je sled neobsahující žádné hrany a obsahující jediný vrchol u (a navíc u a v jsou jeden a tentýž vrchol). Daný sled je triviálně (triviální) cestou: neopakují se v něm ani hrany, ani vrcholy.

Silný indukční krok Ať pro vrcholy u a v platí, že pokud z u do v existuje sled délky k nebo méně, pak existuje i cesta z u do v (silný indukční předpoklad). Dokážeme, že pak tvrzení platí i pro sledy délky $k + 1$.

Nechť t je sled z u do v délky $k + 1$. Pokud je t cestou, vede z u do v cesta triviálně: je jí sled t.

Není-li sled t cestou, prostudujme jeho strukturu. Sled t je posloupnost $v_1 e_1 \dots e_{k+1} v_{k+2}$, pokud označíme vrcholy vyskytující se postupně ve sledu t jako $v_1, \dots, v_{k+2}$. (To mimo jiné znamená, že $u = v_1$ a $v = v_{k+2}$.) Jelikož t není cestou, nějaký vrchol se v něm opakuje vícekrát. Přesněji řečeno, platí $v_i = v_j$ pro nějaká přirozená $i < j$ v rozmezí $0 \dots k + 2$.

Uvažujme pak ale sled, z nějž „odstraníme podsled $v_i \dots v_j$“: ať s je sled $v_1 e_1 \dots e_{i-1} v_i e_j \dots e_{k+1} v_{k+2}$. Jelikož $i < j$, odstranili jsme alespoň jednu hranu a délka sledu u je proto jistě menší než $k + 1$ (neboli $len(u) \leq k$). Proto díky silnému indukčnímu předpokladu existuje cesta z u do v.

Silná indukce Principem silné indukce jsme dokázali, že když existuje sled z vrcholu u do vrcholu v, pak existuje i cesta z u do v.

Úloha 7. Ukažte, že když v prostém grafu G bez smyček má každý vrchol stupeň alespoň k, pak je v G cesta délky k.

Řešení. Zaveďme si nejdříve pomocné značení: pro graf K označíme $\delta(K) = \min_{v \in V} d(v)$ tzv. minimální stupeň grafu K. Podmínku ze zadání pak můžeme přepsat jako $\delta(G) \geq k$.

Důkaz povedeme indukcí podle k a dokážeme dokonce silnější tvrzení. Dokážeme, že pro libovolný graf G splňující podmínky ze zadání existuje cesta délky k pro libovolně zvolený počáteční vrchol cesty. (Přesněji řečeno, pro každý vrchol v grafu G existuje cesta s počátečním vrcholem v a délkou k.)

Základní krok Když $k = 0$, předpoklad zní, že $\delta(G) \geq 0$. Tento předpoklad je ale triviální: pro *každý* graf K platí $\delta(K) \geq 0$. Předpoklad nám tudíž o G nedává žádnou informaci. Ta ale není potřeba, neboť máme dokázat, že pro libovolně zvolený vrchol v grafu G existuje cesta s počátečním vrcholem v a délkou 0. Takovou cestou je vždy triviální cesta v.

Indukční krok Ukážeme, že pokud tvrzení platí pro nějaké přirozené číslo k, pak platí i pro $k + 1$. Předpokládejme tedy (to bude náš indukční předpoklad), že pro libovolný prostý graf H bez smyček s vlastností $\delta(H) \geq k$ platí, že pro libovolný vrchol v grafu H existuje v H cesta délky k s počátečním vrcholem v.

Ať G je libovolný prostý graf bez smyček a platí $\delta(G) \geq k + 1$. Ať u je libovolný vrchol v grafu G. Nalezněme cestu délky $k+1$ s počátečním vrcholem u. Jelikož $\delta(G) \geq k + 1$, platí $d(u) \geq k + 1$. Vyberme libovolnou hranu $u \overset{e}{\text{—}} v$. Nyní odstraňme z grafu G vrchol u a všechny hrany s krajním vrcholem u, tj. uvažujme graf $H = G - u$. Pro graf H jistě platí $\delta(H) \geq k$ (proč?). Z indukčního předpokladu víme, že v H existuje cesta $v \overset{c}{\sim} x$ délky k. Pak v G existuje cesta $u \overset{e}{\text{—}} v \overset{c}{\sim} x$ délky $k + 1$, což jsme měli dokázat.

Indukce Principem matematické indukce jsme dokázali, že pro každé přirozené číslo k platí věta: V prostém grafu G bez smyček, kde má každý vrchol stupeň alespoň k, existuje z každého vrcholu cesta délky k.

Úloha 8. Ukažte, že G je souvislý právě tehdy, když pro libovolný rozklad jeho množiny vrcholů V na (neprázdné) množiny V_1 a V_2 existuje hrana, jež má jeden vrchol z množiny V_1 a jeden z množiny V_2.

Řešení. Tvrzení je ve tvaru ekvivalence, dokážeme oba směry zvlášť.

Souvislost implikuje existenci hrany: Ať je G souvislý. Dokážeme, že pro libovolný rozklad V na V_1 a V_2 existuje hrana $v_1 \overset{e}{—} v_2$ s krajními vrcholy $v_1 \in V_1$ a $v_2 \in V_2$.

Budiž tedy $\{V_1, V_2\}$ libovolný rozklad množiny vrcholů V grafu G. Jelikož jsou množiny V_1 a V_2 neprázdné, jsou v nich určitě nějaké vrcholy $x \in V_1$ a $y \in V_2$. Graf G je souvislý, existuje tedy cesta $x \overset{c}{\sim} y$. Označme jako v_1 vrchol, jež je na cestě c posledním vrcholem patřícím do množiny V_1. (Takový vrchol jistě existuje, neboť přinejmenším x určitě do V_1 patří.) Vrchol v_1 jistě není koncovým vrcholem cesty c, neboť tím je vrchol y a $y \notin V_1$. To znamená, že v cestě c následuje po v_1 hrana (označme ji e) vedoucí do vrcholu, který označíme v_2. Máme tedy hranu $v_1 \overset{e}{—} v_2$. Vrchol v_2 patří do množiny V_2, protože v_1 byl posledním vrcholem patřícím do V_1. Naše hrana e je tedy hledanou hranou.

Existence hrany implikuje souvislost: Nyní o grafu G předpokládejme, že pro libovolný rozklad $R = \{V_1, V_2\}$ jeho množiny vrcholů existuje hrana $v_1 \overset{e}{—} v_2$ s krajními vrcholy $v_1 \in V_1$ a $v_2 \in V_2$.

Máme dokázat, že je G souvislý. Pro libovolné dva vrcholy x a y musíme dokázat, že mezi nimi existuje cesta.

(Poznámka: Dané tvrzení lze samozřejmě dokázat i jednodušeji, například důkazem obměny daného tvrzení. Tento v jádru algoritmický důkaz jsem zvolil pro jeho instruktivnost.)

Dokážeme tvrzení, že pro libovolný vrchol x existuje cesta do všech vrcholů grafu G. Označme jako n počet vrcholů grafu G. Pro $n = 1$ je důkaz triviální, předpokládejme tedy $n \geq 2$. Zkonstruujeme $n - 1$ rozkladů $R_1 = \{X_1, Y_1\}, \ldots, R_{n-1} = \{X_{n-1}, Y_{n-1}\}$ množiny vrcholů V následujícím způsobem:

1. Ať $X_1 = \{x\}$, $Y_1 = V \setminus X_1$. Tím jsme definovali R_1.

2. Když je definováno R_k, zvolme R_{k+1} následovně: Ať $u \overset{e}{—} v$ je hrana mezi nějakými vrcholy $u \in X_k$ a $v \in Y_k$, která jistě existuje z předpokladu. Pak nechť $X_{k+1} = X_k \cup \{v\}$ a $Y_{k+1} = Y_k \setminus \{v\}$.

Dá se snadno dokázat (proveďte!), že

1. $|X_i| = i$, tedy že počet prvků množiny X_i je i,
2. každé R_i je rozklad množiny V,
3. pro každé $1 \leq i \leq k-1$ a každé $z \in X_i$ platí, že z x do z existuje cesta.

Sestrojme nyní ještě „pseudorozklad“ $R_n = \{X_n, Y_n\}$ stejným způsobem, jakým jsme tvořili předchozí rozklady: Ať $u \overset{e}{—} v$ je hrana mezi nějakým vrcholem $u \in X_{n-1}$ a jediným vrcholem $v \in Y_{n-1}$, která jistě existuje z předpokladu. Pak jistě $X_n = V$, $Y_n = \emptyset$ (proto $\{X_n, Y_n\}$ není rozklad, ten nedovoluje použití prázdných množin), a pro libovolný vrchol $y \in X_n$ existuje cesta z x do y. Jelikož ale $X_n = V$, znamená to, že z x je dostupný každý vrchol grafu G. To jsme měli dokázat.

(Poznámka: tento důkaz je zárodkem algoritmů na prohledávání souvislého grafu. V rozkladech R_i hrají množiny X_i roli „prozkoumané části“ grafu a Y_i „neprozkoumané“, neprohledané části grafu. V algoritmech prohledávání do hloubky a do šířky máme větší kontrolu nad výběrem hrany e, díky které rozšiřujeme množinu prozkoumaných vrcholů.)

Úloha 9. Ukažte, že když je doplňkový graf G^{dop} grafu G nesouvislý, pak je G souvislý.

Řešení. Když je graf G^{dop} nesouvislý, obsahuje alespoň dvě různé komponenty souvislosti. Dokážeme, že za tohoto předpokladu je G souvislý.

Musíme dokázat, že pro všechny dvojice vrcholů u, v existuje neorientovaná cesta z u do v. Zvolme tedy u a v libovolně a cestu nalezněme: pak bude důkaz hotov.

Graf G^{dop} je nesouvislý. Jsou naše vrcholy u a v ve stejné komponentě souvislosti grafu G^{dop}, nebo jsou v jeho dvou různých komponentách souvislosti?

Pokud jsou u a v ve dvou různých komponentách souvislosti grafu G^{dop}, pak mezi nimi jistě v G^{dop} nevede hrana. (To by jinak byly v jedné a té samé komponentě souvislosti.) Jelikož v G^{dop} hrana $u \text{ — } v$ není, v grafu G tato hrana je. Mezi vrcholy u a v tudíž v grafu G cesta existuje, dokonce je to cesta délky 1.

Pokud jsou u a v ve stejné komponentě souvislosti grafu G^{dop} (označme danou komponentu K), tak buď $u = v$, a pak vede z u do v triviální cesta, nebo $u \neq v$. Pak z předpokladu víme, že existuje i nějaká jiná komponenta souvislosti grafu G^{dop}, označme ji třeba K'. Vyberme z K' libovolný vrchol a označme ho w. V G^{dop} není hrana $u \text{ — } w$ ani hrana $v \text{ — } w$. Proto v grafu G obě tyto hrany jsou, a proto existuje z u do v cesta $u \text{ — } w \text{ — } v$. Důkaz je hotov.

Úloha 10. V této úloze zavádíme značení $G - e$ pro graf, jenž vznikne z daného grafu G odstraněním hrany e.

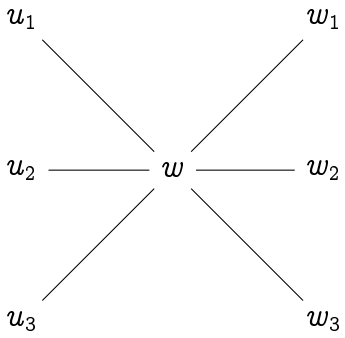
Označme jako $pk(G)$ počet komponent souvislosti grafu G. Dokažte, že pro libovolnou hranu e grafu G platí

$$pk(G) \leq pk(G - e) \leq pk(G) + 1.$$

Ukažte, že pokud bychom místo hrany odebírali z grafu G nějaký vrchol, řekněme v, pak by druhá nerovnost výše obecně neplatila.

Řešení. Označme koncové vrcholy hrany e jako x a y. Pokud v grafu $G-e$ leží vrcholy x a y v jedné komponentě souvislosti, pak zpětným přidáním hrany e zůstane počet komponent souvislosti nezměněn. Pokud leží x a y v různých komponentách souvislosti, pak se přidáním hrany e dané komponenty spojí do jedné, a ostatní komponenty zůstanou nezměněny. Počet komponent souvislosti se tedy sníží o 1. (*Rozeberte tyto argumenty ještě více do hloubky, obzvláště argument o „spojení dvou komponent do jedné“.*)

Kdybychom z níže nakresleného grafu odstranili vrchol v, počet komponent souvislosti se zvýší o 5.



Úloha 11. Ať je G souvislý a všechny jeho vrcholy mají sudý stupeň. Ukažte, že pro libovolný vrchol v grafu G platí

$$pk(G - v) \leq \frac{1}{2}d(v).$$

Řešení. Víme, že každý graf obsahuje sudý počet vrcholů lichého stupně. Tento fakt v důkazu dále použijeme. Z grafu G odstraňme vrchol v, abychom získali graf $G - v$. Nechť tím vznikne $pk(G - v)$ komponent souvislosti. Do každé z těchto komponent souvislosti vedla z vrcholu v hrana (nebo lépe řečeno, v každé z těchto komponent souvislosti je vrchol, který byl s vrcholem v spojen hranou): neexistovala-li by, nebyl by býval graf G souvislý. Vedla-li by do některé z těchto komponent z vrcholu v pouze jedna hrana, obsahovala by daná komponenta jen jeden vrchol lichého stupně, což nastat nemůže. Proto do každé z komponent vedou z vrcholu v alespoň dvě hrany: platí $d(v) \geq 2 \cdot pk(G - v)$. To je po úpravě nerovnost ze zadání.

Úloha 12. Ukažte, že jakékoli dvě nejdelší cesty v souvislém grafu mají společný vrchol.

Řešení. Předpokládejme, že v souvislém grafu G existují dvě nejdelší cesty (tedy nutně stejně dlouhé), které žádný společný vrchol nemají. Označme vrcholy na první z těchto cest (c_1) jako $u_1, \ldots, u_n$, vrcholy na druhé z těchto cest c_2 jako $v_1, \ldots, v_n$. Jelikož je G souvislý, existuje v něm cesta c z u_1 do v_n. Ať u_i je poslední vrchol na cestě c, který leží na cestě c_1. Ať v_j je na cestě c nejdřívější vrchol po u_i takový, že leží na cestě c_2. Ať c' je úsek cesty c mezi u_i a v_j. Tento úsek má délku nejméně 1. Označme jako c'_1 buď úsek cesty c_1 z u_1 do u_i, nebo z u_n do u_i, podle toho, který je delší. Označme jako c'_2 buď úsek cesty c_2 z v_j do v_1, nebo z v_j do v_n, podle toho, který je delší. Pak složení cest c'_1, c' a c'_2 je znovu cesta, a její délka je minimálně

$n+1$. To je spor s předpokladem, že dvě cesty z předpokladu byly nejdelší. Proto dvě nejdelší cesty v souvislém grafu musí mít společný vrchol.

Úloha 13. Sestrojte eulerovský graf se sudým počtem vrcholů a lichým počtem hran.

Úloha 14. Dokažte, že pokud nemá souvislý graf G s alespoň dvěma vrcholy žádné vrcholy lichého stupně, lze množinu jeho hran rozložit na "hranově disjunktní kružnice" (každá třída rozkladu hran je množinou hran nějaké kružnice v grafu G). (*Probráno na přednášce.*)

Úloha 15. Nechť má souvislý graf G přesně čtyři vrcholy lichého stupně. Dokažte, že pak existují nejméně dvě jeho různá minimální pokrytí.

Úloha 16. Nechť G_n je pravidelná síť rovnostranných trojúhelníků, na jejíž každé straně je n vrcholů. Nechť $G_{m,n}$ je čtvercová síť, na jejíchž stranách je m, respektive n vrcholů. (Čísla m a n ať jsou kladná přirozená.)

1. Určete celkový počet vrcholů a hran grafů G_n a $G_{m,n}$.
2. Pro jaké hodnoty m a n jsou výše uvedené grafy eulerovské? Kdy je lze pokrýt jedním otevřeným tahem?