(1) $a \wedge b \vdash b \wedge a$

1.	$a \wedge b$	P
2.	a	$e\wedge_1 1$
3.	b	$e\wedge_2 1$
4.	$b \wedge a$	$i\wedge 2,3$

(2) $(p \wedge q) \wedge r,\ s \wedge t \vdash q \wedge s$

1.	$(p \wedge q) \wedge r$	P
2.	$s \wedge t$	P
3.	$p \wedge q$	$e\wedge_1 1$
4.	q	$e\wedge_2 3$
5.	s	$e\wedge_1 2$
6.	$q \wedge s$	$i\wedge 4,5$

(3) $q \vdash (q \Rightarrow r) \Rightarrow r$

1.	q	P
2.	$q \Rightarrow r$	P
3.	r	$e\Rightarrow 1,2$
4.	$(q \Rightarrow r) \Rightarrow r$	$i\Rightarrow 2\text{-}3$

(4) $a \Rightarrow (b \Rightarrow c) \vdash (a \wedge b) \Rightarrow c$

1.	$a \Rightarrow (b \Rightarrow c)$	P
2.	$a \wedge b$	P
3.	a	$e\wedge_1 2$
4.	$b \Rightarrow c$	$e\Rightarrow 3,1$
5.	b	$e\wedge_2 2$
6.	c	$e\Rightarrow 5,4$
7.	$(a \wedge b) \Rightarrow c$	$i\Rightarrow 2\text{-}6$

(5) $\vdash \neg(a \wedge b) \Rightarrow (a \Rightarrow \neg b)$

1.	$\neg(a \wedge b)$	P
2.	a	P
3.	b	P
4.	$a \wedge b$	$i\wedge 2,3$
5.	$\bot$	$e\neg 1,4$
6.	$\neg b$	$i\neg 3\text{-}5$
7.	$a \Rightarrow \neg b$	$i\Rightarrow 2\text{-}6$
8.	$\neg(a \wedge b) \Rightarrow (a \Rightarrow \neg b)$	$i\Rightarrow 1\text{-}7$

(6) $\vdash ((a \Rightarrow c) \wedge (b \Rightarrow \neg c)) \Rightarrow \neg(a \wedge b)$

1.	$(a \Rightarrow c) \wedge (b \Rightarrow \neg c)$	P
2.	$a \Rightarrow c$	$e\wedge_1 1$
3.	$b \Rightarrow \neg c$	$e\wedge_2 1$
4.	$a \wedge b$	P
5.	a	$e\wedge_1 4$
6.	b	$e\wedge_2 4$
7.	c	$e\Rightarrow 5,2$
8.	$\neg c$	$e\Rightarrow 6,3$
9.	$\bot$	$e\neg 7,8$
10.	$\neg(a \wedge b)$	$i\neg 4\text{-}9$
11.	$((a \Rightarrow c) \wedge (b \Rightarrow \neg c)) \Rightarrow \neg(a \wedge b)$	

(7) $\vdash (a \wedge b) \Rightarrow ((a \Rightarrow c) \Rightarrow \neg(b \Rightarrow \neg c))$

1.	$a \wedge b$	P
2.	a	$e\wedge_1$ 1
3.	b	$e\wedge_2$ 1
4.	$a \Rightarrow c$	P
5.	$b \Rightarrow \neg c$	P
6.	c	$e\Rightarrow$ 2,4
7.	$\neg c$	$e\Rightarrow$ 3,5
8.	$\bot$	$e\neg$ 6,7
9.	$\neg(b \Rightarrow \neg c)$	$i\neg$ 5–8
10.	$(a \Rightarrow c) \Rightarrow \neg(b \Rightarrow \neg c)$	$i\Rightarrow$ 4–9
11.	$(a \wedge b) \Rightarrow ((a \Rightarrow c) \Rightarrow \neg(b \Rightarrow \neg c))$	$i\Rightarrow$ 1–10

(8) $(p \vee q) \Rightarrow r \vdash q \Rightarrow r$

1.	$(p \vee q) \Rightarrow r$	P
2.	q	P
3.	$p \vee q$	$i\vee_2$ 2
4.	r	$e\Rightarrow$ 3,1
5.	$q \Rightarrow r$	$i\Rightarrow$ 2–4

(9) $\neg a \wedge \neg b \vdash \neg(a \vee b)$

0.	$\neg a \wedge \neg b$	P
1.	$\neg a$	$e\wedge_1$ 0
2.	$\neg b$	$e\wedge_2$ 0
3.	$a \vee b$	P
4.	a	P
5.	$\bot$	$e\neg$ 4,1
6.	b	P
7.	$\bot$	$e\neg$ 6,2
8.	$\bot$	$e\vee$ 3,4–5,6–7
9.	$\neg(a \vee b)$	$i\neg$ 3–8

(10) $w \Rightarrow x, y \Rightarrow z \vdash (w \vee y) \Rightarrow (x \vee z)$

1.	$w \Rightarrow x$	P
2.	$y \Rightarrow z$	P
3.	$w \vee y$	P
4.	w	P
5.	x	$e\Rightarrow$ 4,1
6.	$x \vee z$	$i\vee_1$ 5
7.	y	P
8.	z	$e\Rightarrow$ 7,2
9.	$x \vee z$	$i\vee_2$ 8
10.	$x \vee z$	$e\vee$ 3,4–6,7–9
11.	$(w \vee y) \Rightarrow (x \vee z)$	$i\Rightarrow$ 3–10

(11) $a \wedge (b \vee c) \vdash (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

1.	$a \wedge (b \vee c)$	P
2.	a	$e\wedge_1$ 1
3.	$b \vee c$	$e\wedge_2$ 1
4.	b	P
5.	$(a \wedge b)$	$i\wedge$ 2,4
6.	$(a \wedge b) \vee (a \wedge c)$	$i\vee_1$ 5
7.	c	P
8.	$(a \wedge c)$	$i\wedge$ 2,7
9.	$(a \wedge b) \vee (a \wedge c)$	$i\vee_2$ 8
10.	$(a \wedge b) \vee (a \wedge c)$	$e\vee$ 3,4–6,7–9

(12) $\neg a \vee \neg b \vdash \neg(a \wedge b)$

1.	$\neg a \vee \neg b$	P
2.	$a \wedge b$	P
3.	a	e∧ 1 2
4.	b	e∧ 2 2
5.	$\neg a \vee \neg b$	it 1
6.	$\neg a$	P
7.	$\bot$	e¬ 3,6
8.	$\neg b$	P
9.	$\bot$	e¬ 4,8
10.	$\bot$	eV 5)6–7,8–9
11.	$\neg(a \wedge b)$	i¬ 2–10

Nepřímé (1)

$\neg p \Rightarrow (q \vee r), \neg q, \neg r \vdash p$

1.	$\neg p \Rightarrow (q \vee r)$	P
2.	$\neg q$	P
3.	$\neg r$	P
4.	$\neg p$	P
5.	$q \vee r$	e⇒ 4,1
6.	q	P
7.	$\bot$	e¬ 6,2
8.	r	P
9.	$\bot$	e¬ 8,3
10.	$\bot$	eV 5,6–7,8–9
11.	$\neg\neg p$	i¬ 4–10
12.	p	e¬¬ 11

Nepřímé (2)

$\neg(\neg p \vee \neg q) \vdash p \wedge q$

1.	$\neg(\neg p \vee \neg q)$	P
2.	$\neg p$	P
3.	$\neg p \vee \neg q$	iV 1 2
4.	$\bot$	e¬ 3,1
5.	p	i¬ 2–4
6.	$\neg q$	P
7.	$\neg p \vee \neg q$	iV 2 6
8.	$\bot$	e¬ 7,1
9.	q	i¬ 6–8
10.	$p \wedge q$	i∧ 5,9

Ekvivalence (1)

$\vdash \neg(a \Leftrightarrow \neg a)$

1.	$a \Leftrightarrow \neg a$	P
2.	a	P
3.	$\neg a$	e⇔ 2,1
4.	$\bot$	e¬ 2,3
5.	$\neg a$	i¬ 2–4
6.	a	e⇔ 5,1
7.	$\bot$	e¬ 6,5
8.	$\neg(a \Leftrightarrow \neg a)$	i¬ 1–7

Ekvivalence (2)

$a \Leftrightarrow b \vdash (\neg a \Leftrightarrow \neg b)$

1.	$a \Leftrightarrow b$	P
2.	$\neg a$	P
3.	b	P
4.	a	e⇔ 1,3
5.	$\bot$	e¬ 4,2
6.	$\neg b$	i¬ 3–5
7.	$\neg b$	P
8.	a	P
9.	b	e⇔ 8,1
10.	$\bot$	e¬ 9,7
11.	$\neg a$	i¬ 8–10
12.	$\neg a \Leftrightarrow \neg b$	2–6,7–11

LEM (1)

$a \Rightarrow b \vdash \neg a \vee b$

1. $a \Rightarrow b$ P
2. $a \vee \neg a$ LEM
3. a P
4. b e⇒ 3, 1
5. $\neg a \vee b$ i∨2 4
6. $\neg a$ P
7. $\neg a \vee b$ i∨1 6
8. $\neg a \vee b$ e∨ 2, 3-5, 6-7

LEM (2)

$\vdash a \Rightarrow ((a \wedge b) \vee (a \wedge \neg b))$

1. a P
2. $b \vee \neg b$ LEM
3. b P
4. $a \wedge b$ i∧ 1, 3
5. $(a \wedge b) \vee (a \wedge \neg b)$ i∨1 4
6. $\neg b$ P
7. $a \wedge \neg b$ i∧ 1, 6
8. $(a \wedge b) \vee (a \wedge \neg b)$ i∨2 7
9. $(a \wedge b) \vee (a \wedge \neg b)$ e∨ 2, 3-5, 6-8
10. $a \Rightarrow ((a \wedge b) \vee (a \wedge \neg b))$ i⇒ 1-9