Upozornění k řešení Předložená řešení jsou spíše návody k řešení. Ve zkouškové písemce doporučujeme, aby vaše argumentace byla podrobnější.

Úloha 5 (10 bodů) Dokažte, že pro každý *souvislý* orientovaný graf G platí:

G je silně souvislý právě tehdy, když každá jeho hrana leží v nějakém cyklu.

(Pozor: máte dokázat tvrzení tvaru ekvivalence, tedy dvě implikace.)

Řešení Standardní tvrzení z přednášky.

1. Pokud je G silně souvislý, uvažujme v něm hranu $x \xrightarrow{e} y$. Pokud $x = y$, pak je e smyčkou, a tedy leží v cyklu. Pokud $x \neq y$, pak ze silné souvislosti v grafu G existuje orientovaná cesta $y \rightsquigarrow x$. Spolu s hranou e tato cesta tvoří cyklus.
2. Pokud v grafu G každá jeho hrana leží v nějakém cyklu, ukážeme, že je G silně souvislý. Nechť x a y jsou vrcholy v G. Nalezneme orientovanou cestu z x do y. Jelikož je G souvislý, existuje mezi x a y neorientovaná cesta $c : x \sim y$. Pokud je tato neorientovaná cesta orientovanou cestou z x do y, jsme u konce. Pokud c není orientovanou cestou z x do y, existují v ní hrany, které mají nesprávnou orientaci. Pro každou takovou hranu $u \xleftarrow{e} v$ využijeme toho, že leží v nějakém cyklu, a označíme jako $e' : u \rightsquigarrow v$ orientovanou cestu z u do v, která je součástí daného cyklu. V cestě c nahradíme hranu e orientovanou cestou e'. Tím získáme orientovaný sled z x do y, který lze (dle věty o zkrácení na cestu) zkrátit na orientovanou cestu $c' : x \rightsquigarrow y$. Graf G je tedy silně souvislý, což jsme měli dokázat.

Úloha 6 (10 bodů) Dokažte, že každý neorientovaný graf G, ve kterém má každý vrchol stupeň alespoň 2, obsahuje kružnici.

Řešení Standardní tvrzení z přednášky. Využijte nejdelší (otevřené) cesty v G k sestrojení hledané kružnice. (Z konce této cesty „trčí“ hrana, která nutně vede do vrcholu, který leží na dané cestě. Kdyby vrchol neležel na dané cestě, mohli bychom sestrojit delší cestu.)

Úloha 7 (10 bodů) Neorientovaný graf G nazveme *kritickým*, pokud pro každý jeho podgraf $H \neq G$ platí $\chi(H) < \chi(G)$. Dokažte, že každý kritický graf je souvislý.

Řešení Tvrzení dokážeme obměnou. To znamená, že dokážeme, že každý nesouvislý graf je nekritický (není kritický).

Mějme nesouvislý graf G s komponentami souvislosti $S_1, \ldots, S_k$, kde $k > 1$. Barevnost grafu G, to jest $\chi(G)$, můžeme spočítat jako

$$\chi(G) = \max_{i=1,\ldots,k} \chi(S_i).$$

(Myšlenka argumentu je, že každou komponentu můžeme barvit nezávisle na ostatních.) Pro některou z komponent souvislosti grafu G (označme ji například jako S_j) platí

$$\chi(S_j) = \chi(G).$$

(Myšlenka tohoto argumentu je, že na některou z komponent souvislosti bude třeba nejvíce barev.) Komponenta souvislosti S_j grafu G je podgrafem grafu G, není celým grafem G (neboť G má komponent souvislosti více), a přitom pro ni neplatí $\chi(S_j) < \chi(G)$. Graf G tedy není kritický.