V každé úloze můžete předpokládat, že pracujeme s jazykem predikátové logiky, ve kterém jsou všechny zmíněné řetězce symbolů sentencemi.

Upozornění k řešení V předložených řešeních je argumentace zcela minimální: především u tvorby interpretací doporučujeme ve zkoušce zdůvodnění rozšířit.

Úloha 1 (10 bodů) Rozhodněte, zda platí následující důsledek.

$$\forall x \forall y((\exists z M(y,z)) \Rightarrow M(x,y)),\ \ \exists x \exists y M(x,y) \vdash \forall x \forall y M(x,y)$$

(*Každý miluje milovníka. Někdo někoho miluje. Proto všichni všechny milují.*)

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

Řešení Logický důsledek platí. Předvedeme důkaz přirozenou dedukcí.

1.	$\forall x \forall y((\exists z M(y,z)) \Rightarrow M(x,y))$	P
2.	$\exists x \exists y M(x,y)$	P
3.	y_0	D
4.	$\forall y((\exists z M(y,z)) \Rightarrow M(y_0,y))$	e$\forall x$, 1
5.	$a_0 : \exists y M(a_0,y)$	W
6.	$(\exists z M(a_0,z)) \Rightarrow M(y_0,a_0)$	e$\forall y$, 4
7.	$b_0 : M(a_0,b_0)$	W
8.	$\exists z M(a_0,z)$	i$\exists z$, 7
9.	$M(y_0,a_0)$	e$\Rightarrow$, 8, 6
10.	$M(y_0,a_0)$	e$\exists y$, 5, 7–9
11.	$\exists z M(y_0,z)$	i$\exists z$, 10
12.	$\exists z M(y_0,z)$	e$\exists x$, 2, 5–11
13.	$\forall y \exists z M(y,z)$	i$\forall y$, 3–12
14.	x_0	D
15.	y_0	D
16.	$\forall y((\exists z M(y,z)) \Rightarrow M(x_0,y))$	e$\forall x$, 1
17.	$(\exists z M(y_0,z)) \Rightarrow M(x_0,y_0)$	e$\forall y$, 16
18.	$\exists z M(y_0,z)$	e$\forall y$, 13
19.	$M(x_0,y_0)$	e$\Rightarrow$, 18, 17
20.	$\forall y M(x_0,y)$	i$\forall y$, 15–19
21.	$\forall x \forall y M(x,y)$	i$\forall x$, 14–20

Úloha 2 (10 bodů) Rozhodněte, zda je následující množina sentencí splnitelná.

$$S = \{\exists x(R(x,x) \wedge \forall y Q(x,y)),\ \neg \exists x((\exists y R(x,y)) \wedge Q(x,x))\}$$

Pokud je množina S splnitelná, sestrojte její model. Pokud není splnitelná, odvoďte přirozenou dedukcí z S spor.

Řešení Množina S není splnitelná. Předvedeme odvození sporu přirozenou dedukcí.

1.	$\exists x(R(x,x) \wedge \forall y Q(x,y))$	P
2.	$\neg\exists x((\exists y R(x,y)) \wedge Q(x,x))$	P
3.	$x_0 : R(x_0,x_0) \wedge \forall y Q(x_0,y)$	W
4.	$R(x_0,x_0)$	e$\wedge_1$, 3
5.	$\exists y R(x_0,y)$	i$\exists y$, 5
6.	$\forall y Q(x_0,y)$	e$\wedge_2$, 3
7.	$Q(x_0,x_0)$	e$\forall y$, 6
8.	$\exists y R(x_0,y) \wedge Q(x_0,x_0)$	i$\wedge$, 5, 7
9.	$\exists x(\exists y R(x,y) \wedge Q(x,x))$	i$\exists x$, 8
10.	$\bot$	e$\neg$, 9, 2
11.	$\bot$	e$\exists x$, 1, 3–10

Úloha 3 (10 bodů) Rozhodněte, zda platí následující důsledek.

$$\exists x(P(x) \wedge \forall y(P(y) \Rightarrow x = y)) \vdash P(a) \Rightarrow \forall y(a = y)$$

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

Řešení Daný důsledek neplatí. To ukážeme konstrukcí interpretace $\mathcal{I}$, v níž bude předpoklad pravdivý, ale závěr nepravdivý.

Nechť $\mathcal{I}$ je interpretace s dvouprvkovým universem $U = \{u, v\}$, nechť $[\![P]\!] = \{u\}$ a $[\![a]\!] = u$.

Pak je v $\mathcal{I}$ sentence

$$\exists x(P(x) \wedge \forall y(P(y) \Rightarrow x = y))$$

pravdivá, neboť existuje prvek universa (u), který má vlastnost $[\![P]\!]$, a všechny další prvky s vlastností $[\![P]\!]$ jsou mu rovny: prvek u je totiž *jediným* prvkem s danou vlastností. Oproti tomu je implikace

$$P(a) \Rightarrow \forall y(a = y)$$

v interpretaci $\mathcal{I}$ nepravdivá: předpoklad $P(a)$ je sice pravdivý (prvek $u = [\![a]\!]$ má vlastnost $[\![P]\!]$), ale závěr (sentence $\forall y(a = y)$) pravdivý není. Ne všechny prvky universa U jsou rovny prvku $u = [\![a]\!]$ (prvek v není roven prvku u).

Úloha 4 (10 bodů) Rozhodněte, zda je následující množina sentencí splnitelná.

$$M = \{\forall x \neg S(x,x),\ \forall x \exists y S(x,y),\ \forall x \forall y \forall z((S(x,y) \wedge S(y,z)) \Rightarrow S(x,z))\}$$

Pokud je množina M splnitelná, sestrojte její model. Pokud není splnitelná, odvoďte přirozenou dedukcí z M spor.

Řešení Množina M je splnitelná. Jejím modelem je například interpretace $\mathcal{I}$, jejímž universem U je množina přirozených čísel $\mathbb{N}$, a kde $[\![S]\!] = \{(m,n) \mid m < n\}$.

Sentence $\forall x \neg S(x,x)$ je v $\mathcal{I}$ pravdivá, neboť žádné přirozené číslo není menší než ono samo. Sentence $\forall x \exists y S(x,y)$ je v $\mathcal{I}$ pravdivá, neboť ke každému přirozenému číslu existuje větší přirozené číslo. Sentence $\forall x \forall y \forall z((S(x,y) \wedge S(y,z)) \Rightarrow S(x,z))$ je v $\mathcal{I}$ pravdivá, neboť vztah „být menší než“ je na množině přirozených čísel transitivní.