Logika a grafy — 13. června 2022 — vaše ID je 1

Jméno a příjmení: Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení.
Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

Požadavky na vypracování

- Pište na bílé (nečtverečkované, nelinkované) jednotlivé listy papíru formátu A4 a pište propiskou výrazné barvy (tmavě modrá, černá). Nepoužívejte obyčejnou tužkou ani červenou barvu.
- Každý příklad začínejte na nové straně papíru (straně, nikoli listu). U každé úlohy uveďte jen jeden způsob řešení.
- Svá tvrzení řádně zdůvodňujte. U každého výpočtu je třeba komentář.

Úloha 5 (10 bodů) Pro obyčejný neorientovaný graf $G = (V, E)$ nazveme jeho *doplňkem* obyčejný neorientovaný graf $G^{dop} = (V, E')$, který má množinu vrcholů shodnou s grafem G, a v jeho množině hran E' jsou právě ty hrany, které v množině hran E nejsou.

(2 body) Sestrojte souvislý (obyčejný neorientovaný) graf G takový, že G^{dop} je také souvislý.

(8 bodů) Dokažte, že pro každý (obyčejný neorientovaný) graf G platí:

Pokud je G nesouvislý, pak je G^{dop} souvislý.

Úloha 6 (10 bodů) Nechť má graf G barevnost $\chi(G)$. Dokažte, že počet jeho hran je nejméně

$$\frac{\chi(G) \cdot (\chi(G) - 1)}{2}.$$

(*Upozornění: graf G není nutně úplný graf.*)

Úloha 7 (10 bodů) Dokažte, že každý orientovaný acyklický graf G obsahuje vrchol v, pro který platí

$$d^{out}(v) = 0.$$

(*Značením $d^{out}(v)$ se myslí takzvaný výstupní stupeň vrcholu v.*)