V každé úloze můžete předpokládat, že pracujeme s jazykem predikátové logiky, ve kterém jsou všechny zmíněné řetězce symbolů sentencemi. **Pozorně čtěte závorky!**

Úloha 1 (10 bodů) Rozhodněte, zda platí následující důsledek.

$$\forall x(\exists y(M(x,y) \vee M(y,x)) \Rightarrow M(x,x)), \exists x \exists y M(x,y) \vdash \exists x M(x,x)$$

(*Každý, kdo miluje či je milován, miluje sám sebe. Někdo někoho miluje. Tedy někdo miluje sám sebe.*)

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

Řešení Logický důsledek platí. Předvedeme důkaz přirozenou dedukcí.

1.	$\forall x(\exists y(M(x,y) \vee M(y,x)) \Rightarrow M(x,x))$	P
2.	$\exists x \exists y M(x,y)$	P
3.	$x_0 : \exists y M(x_0,y)$	W
4.	$y_0 : M(x_0,y_0)$	W
5.	$M(x_0,y_0) \vee M(y_0,x_0)$	i$\vee_1$, 4
6.	$\exists y(M(x_0,y) \vee M(y,x_0))$	i$\exists y$, 5
7.	$\exists y(M(x_0,y) \vee M(y,x_0))$	e$\exists y$, 3, 4–6
8.	$\exists y(M(x_0,y) \vee M(y,x_0)) \Rightarrow M(x_0,x_0)$	e$\forall x$, 1
9.	$M(x_0,x_0)$	e$\Rightarrow$, 7, 8
10.	$\exists x M(x,x)$	i$\forall x$, 9
11.	$\exists x M(x,x)$	e$\exists x$, 2, 3–10

Úloha 2 (10 bodů) Rozhodněte, zda je následující množina sentencí splnitelná.

$$S = \{(\forall x P(x)) \Rightarrow (\forall x Q(x)),\ \exists y(P(y) \wedge \neg Q(y)),\ \forall z \neg Q(z)\}$$

Pokud je množina S splnitelná, sestrojte její model. Pokud není splnitelná, odvoďte přirozenou dedukcí z S spor.

Řešení Množina S je splnitelná. Jejím modelem je například interpretace $\mathcal{I}$, jejímž universem U je množina $\{u, v\}$, kde $[\![P]\!] = \{u\}$ a $[\![Q]\!] = \emptyset$.

(První sentence je v $\mathcal{I}$ pravdivá, protože není pravdivý předpoklad implikace: ne všechny prvky z U mají vlastnost $[\![P]\!]$. Druhá sentence je pravdivá, svědkem je prvek u. Třetí sentence je pravdivá, žádný prvek nemá vlastnost $[\![Q]\!]$.)

Úloha 3 (10 bodů) Rozhodněte, zda platí následující důsledek.

$$\forall x \forall y((P(x) \wedge (x = y)) \Rightarrow \neg Q(y)) \vdash \forall z \neg(P(z) \wedge Q(z))$$

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

Řešení Logický důsledek platí. Předvedeme důkaz přirozenou dedukcí.

1.	$\forall x \forall y((P(x) \wedge (x = y)) \Rightarrow \neg Q(y))$	P
2.	z_0	D
3.	$P(z_0) \wedge Q(z_0)$	P
4.	$\forall y((P(z_0) \wedge (z_0 = y)) \Rightarrow \neg Q(y))$	e$\forall x$, 1
5.	$(P(z_0) \wedge (z_0 = z_0)) \Rightarrow \neg Q(z_0)$	e$\forall y$, 4
6.	$P(z_0)$	e$\wedge_1$, 3
7.	$z_0 = z_0$	i=
8.	$P(z_0) \wedge (z_0 = z_0)$	i$\wedge$, 6, 7
9.	$\neg Q(z_0)$	e$\Rightarrow$, 8, 5
10.	$Q(z_0)$	e$\wedge_2$, 3
11.	$\bot$	e$\neg$, 10, 9
12.	$\neg(P(z_0) \wedge Q(z_0))$	i$\neg$, 3–11
13.	$\forall z \neg(P(z) \wedge Q(z))$	i$\forall z$, 2–12

Úloha 4 (10 bodů) Rozhodněte, zda je následující množina sentencí splnitelná.

$$M = \{\forall x S(x,x),\ (\forall x \exists y S(y,x)) \Rightarrow (\exists y \forall x \neg S(x,y))\}$$

Pokud je množina M splnitelná, sestrojte její model. Pokud není splnitelná, odvoďte přirozenou dedukcí z M spor.

Řešení Množina M není splnitelná. Předvedeme odvození sporu přirozenou dedukcí.

1.	$\forall x S(x,x)$	P
2.	$(\forall x \exists y S(y,x)) \Rightarrow (\exists y \forall x \neg S(x,y))$	P
3.	x_0	D
4.	$S(x_0,x_0)$	e$\forall x$, 1
5.	$\exists y S(y,x_0)$	i$\exists y$, 4
6.	$\forall x \exists y S(y,x)$	i$\forall x$, 3–5
7.	$\exists y \forall x \neg S(x,y)$	e$\Rightarrow$, 6, 2
8.	$y_0 : \forall x \neg S(x,y_0)$	W
9.	$\neg S(y_0,y_0)$	e$\forall x$, 8
10.	$S(y_0,y_0)$	e$\forall x$, 1
11.	$\bot$	e$\neg$, 10, 9
12.	$\bot$	e$\exists y$, 7, 8–11