V každé úloze můžete předpokládat, že pracujeme s jazykem predikátové logiky, ve kterém jsou všechny zmíněné řetězce symbolů sentencemi. **Pozorně čtěte závorky!**

Úloha 1 (10 bodů) Rozhodněte, zda platí následující důsledek.

$$\forall x(K(x) \Rightarrow Z(x)) \vdash \forall x(\exists y(K(y) \wedge O(x,y)) \Rightarrow \exists y(Z(y) \wedge O(x,y)))$$

(*Koně jsou zvířata. Proto ocas koně je ocasem zvířete.*)

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

Řešení Logický důsledek platí. Předvedeme důkaz přirozenou dedukcí.

1.	$\forall x(K(x) \Rightarrow Z(x))$	P
2.	x_0	D
3.	$\exists y(K(y) \wedge O(x_0,y))$	P
4.	$y_0 : K(y_0) \wedge O(x_0,y_0)$	W
5.	$K(y_0)$	e$\wedge_1$, 4
6.	$K(y_0) \Rightarrow Z(y_0)$	e$\forall x$, 1
7.	$Z(y_0)$	e$\Rightarrow$, 5, 6
8.	$O(x_0,y_0)$	e$\wedge_2$, 4
9.	$Z(y_0) \wedge O(x_0,y_0)$	i$\wedge$, 7, 8
10.	$\exists y(Z(y) \wedge O(x_0,y))$	i$\exists y$, 9
11.	$\exists y(Z(y) \wedge O(x_0,y))$	e$\exists y$, 3, 4–10
12.	$\exists y(K(y) \wedge O(x_0,y)) \Rightarrow \exists y(Z(y) \wedge O(x_0,y))$	i$\Rightarrow$, 3–11
13.	$\forall x(\exists y(K(y) \wedge O(x,y)) \Rightarrow \exists y(Z(y) \wedge O(x,y)))$	i$\forall x$, 2–12

Úloha 2 (10 bodů) Rozhodněte, zda je následující množina sentencí splnitelná.

$$S = \{\forall x \exists y (R(x,y) \wedge P(y)),\ \exists z P(z),\ \forall x (P(x) \Rightarrow \forall y \neg R(y,x))\}$$

Pokud je množina S splnitelná, sestrojte její model. Pokud není splnitelná, odvoďte přirozenou dedukcí z S spor.

Řešení Množina S není splnitelná. Předvedeme odvození sporu přirozenou dedukcí.

1.	$\forall x \exists y (R(x,y) \wedge P(y))$	P
2.	$\exists z P(z)$	P
3.	$\forall x (P(x) \Rightarrow \forall y \neg R(y,x))$	P
4.	$z_0 : P(z_0)$	W
5.	$\exists y (R(z_0,y) \wedge P(y))$	e$\forall x$, 1
6.	$y_0 : R(z_0,y_0) \wedge P(y_0)$	W
7.	$P(y_0)$	e$\wedge_2$, 6
8.	$P(y_0) \Rightarrow \forall y \neg R(y,y_0)$	e$\forall x$, 3
9.	$\forall y \neg R(y,y_0)$	e$\Rightarrow$, 7, 8
10.	$R(z_0,y_0)$	e$\wedge_1$, 6
11.	$\neg R(z_0,y_0)$	e$\forall y$, 9
12.	$\bot$	e$\neg$, 10, 11
13.	$\bot$	e$\exists y$, 5, 6–12
14.	$\bot$	e$\exists z$, 2, 4–13

Úloha 3 (10 bodů) Rozhodněte, zda platí následující důsledek.

$$\exists x \exists y R(x,y),\ \exists x \forall y (x = y) \vdash \forall x \forall y R(x,y)$$

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

Řešení Logický důsledek platí. Předvedeme důkaz přirozenou dedukcí.

1.	$\exists x \exists y R(x,y)$	P
2.	$\exists x \forall y (x = y)$	P
3.	x_0	D
4.	y_0	D
5.	$x_1 : \exists y R(x_1, y)$	W
6.	$y_1 : R(x_1, y_1)$	W
7.	$u : \forall y (u = y)$	W
8.	$u = x_1$	e$\forall y$, 7
9.	$x_1 = u$	sym$=$, 8
10.	$u = x_0$	e$\forall y$, 7
11.	$R(u, y_1)$	e$=$, 9, 6
12.	$R(x_0, y_1)$	e$=$, 10, 11
13.	$u = y_1$	e$\forall y$, 7
14.	$y_1 = u$	sym$=$, 13
15.	$u = y_0$	e$\forall y$, 7
16.	$R(x_0, u)$	e$=$, 14, 12
17.	$R(x_0, y_0)$	e$=$, 15, 16
18.	$R(x_0, y_0)$	e$\exists x$, 2, 7–17
19.	$R(x_0, y_0)$	e$\exists y$, 5, 6–18
20.	$R(x_0, y_0)$	e$\exists x$, 1, 5–19
21.	$\forall y R(x_0, y)$	i$\forall y$, 4–19
22.	$\forall x \forall y R(x,y)$	i$\forall x$, 3–21

Úloha 4 (10 bodů) Rozhodněte, zda je následující množina sentencí splnitelná.

$$M = \{\forall x S(x,x),\ \exists x((\forall y S(y,x)) \Rightarrow \forall z S(x,z))\}$$

Pokud je množina M splnitelná, sestrojte její model. Pokud není splnitelná, odvoďte přirozenou dedukcí z M spor.

Řešení Množina M je splnitelná. Jejím modelem je například interpretace $\mathcal{I}$, jejímž universem U je množina $\{u\}$, kde $[\![S]\!] = \{(u,u)\}$. (Ověřit, že sentence z množiny M jsou v interpretaci $\mathcal{I}$ pravdivé, je snadné.)