V každé úloze můžete předpokládat, že pracujeme s jazykem predikátové logiky, ve kterém jsou všechny zmíněné řetězce symbolů sentencemi.

Upozornění k řešení V předložených řešeních je argumentace zcela minimální: především u tvorby interpretací doporučujeme ve zkoušce zdůvodnění rozšířit.

Úloha 1 (10 bodů) Rozhodněte, zda platí následující důsledek.

$$\begin{aligned}\forall x(B(x) \Rightarrow (\exists y M(x,y) \Rightarrow \exists y M(y,x))),\\ \forall x(\exists y M(y,x) \Rightarrow M(x,x)),\\ \neg\exists x M(x,x)\\ \vdash \forall x(B(x) \Rightarrow \forall y \neg M(x,y))\end{aligned}$$

(*Všichni blonďatí milovníci jsou milováni. Všichni, kdo jsou milováni, milují sami sebe. Nikdo nemiluje sám sebe. Proto blonďatí nikoho nemilují.*)

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

Řešení Logický důsledek platí. Předvedeme důkaz přirozenou dedukcí.

1.	$\forall x(B(x) \Rightarrow (\exists y M(x,y) \Rightarrow \exists y M(y,x)))$	P
2.	$\forall x(\exists y M(y,x) \Rightarrow M(x,x))$	P
3.	$\neg\exists x M(x,x)$	P
4.	x_0	D
5.	$B(x_0)$	P
6.	$B(x_0) \Rightarrow (\exists y M(x_0,y) \Rightarrow \exists y M(y,x_0))$	e$\forall x$, 1
7.	$\exists y M(x_0,y) \Rightarrow \exists y M(y,x_0)$	e$\Rightarrow$, 5, 6
8.	y_0	D
9.	$M(x_0,y_0)$	P
10.	$\exists y M(x_0,y)$	i$\exists y$, 9
11.	$\exists y M(y,x_0)$	e$\Rightarrow$, 9, 7
12.	$\exists y M(y,x_0) \Rightarrow M(x_0,x_0)$	e$\forall x$, 2
13.	$M(x_0,x_0)$	e$\Rightarrow$, 11, 12
14.	$\exists x M(x,x)$	i$\exists x$, 13
15.	$\bot$	e$\neg$, 14, 3
16.	$\neg M(x_0,y_0)$	i$\neg$, 9–15
17.	$\forall y \neg M(x_0,y)$	i$\forall y$, 8–16
18.	$B(x_0) \Rightarrow \forall y \neg M(x_0,y)$	i$\Rightarrow$, 5–17
19.	$\forall x(B(x) \Rightarrow \forall y \neg M(x,y))$	i$\forall x$, 4–18

Úloha 2 (10 bodů) Rozhodněte, zda je následující množina sentencí splnitelná.

$$\begin{aligned}S = \{\forall x\forall y((\neg(x=y) \wedge M(x,y)) \Rightarrow \neg M(y,x)),\ \forall x M(a,x),\\ \exists y\forall z M(z,y),\ \exists x\exists y \neg(x=y)\}\end{aligned}$$

Pokud je množina S splnitelná, sestrojte její model. Pokud není splnitelná, odvoďte přirozenou dedukcí z S spor.

Řešení Množina S je splnitelná. Jejím modelem je například interpretace $\mathcal{I}$, jejímž universem U je množina $\{u, v\}$, kde

$$\begin{aligned}[\![a]\!] &= u,\\ [\![M]\!] &= \{(u,u),(u,v),(v,v)\}.\end{aligned}$$

(Ověřit, že sentence z množiny S jsou v interpretaci $\mathcal{I}$ pravdivé, je snadné.)

Úloha 3 (10 bodů) Rozhodněte, zda platí následující důsledek.

$$P(b) \wedge Q(b),\ \forall x(P(x) \Rightarrow x = a) \vdash Q(a)$$

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

Řešení Logický důsledek platí. Předvedeme důkaz přirozenou dedukcí.

1.	$P(b) \wedge Q(b)$	P
2.	$\forall x(P(x) \Rightarrow x = a)$	P
3.	$P(b)$	e$\wedge_1$, 1
4.	$P(b) \Rightarrow b = a$	e$\forall x$, 2
5.	$b = a$	e$\Rightarrow$, 3, 4
6.	$Q(b)$	e$\wedge_2$, 1
7.	$Q(a)$	e=, 5, 6

Úloha 4 (10 bodů) Rozhodněte, zda je následující množina sentencí splnitelná.

$$M = \{\exists x \exists y O(x,y),\ \forall x(K(x) \Rightarrow Z(x)),\ \forall x(\exists y(K(y) \wedge O(x,y)) \Rightarrow \exists y(Z(y) \wedge O(x,y)))\}$$

Pokud je množina M splnitelná, sestrojte její model. Pokud není splnitelná, odvoďte přirozenou dedukcí z M spor.

Řešení Množina M je splnitelná. Jejím modelem je například interpretace $\mathcal{I}$, jejímž universem U je množina $\{u\}$, kde

$$\begin{aligned}[\![O]\!] &= \{(u,u)\},\\ [\![K]\!] &= \emptyset,\\ [\![Z]\!] &= \emptyset.\end{aligned}$$

Ověřit, že sentence z množiny M jsou v interpretaci $\mathcal{I}$ pravdivé, je snadné: první sentence platí, neboť $(u,u) \in [\![O]\!]$, druhé dvě sentence neplatí, neboť v universu U není žádný prvek, který by patřil do množiny $[\![K]\!]$ či $[\![Z]\!]$.