Logika a grafy — 31. května 2022 — vaše ID je 1

Jméno a příjmení: Podpis:

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení.
Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

Požadavky na vypracování

- Pište na bílé (nečtverečkované, nelinkované) jednotlivé listy papíru formátu A4 a pište propiskou výrazné barvy (tmavě modrá, černá). Nepoužívejte obyčejnou tužkou ani červenou barvu.
- Každý příklad začínejte na nové straně papíru (straně, nikoli listu). U každé úlohy uveďte jen jeden způsob řešení.
- Svá tvrzení řádně zdůvodňujte. U každého výpočtu je třeba komentář.

Úloha 5 (10 bodů) Dokažte, že pro libovolný (obyčejný) neorientovaný graf G platí

$$\alpha(G) \cdot \chi(G) \geq n.$$

(Připomenutí značení: $\alpha(G)$ označuje *nezávislost* grafu G, $\chi(G)$ označuje *barevnost* grafu G.)

Úloha 6 (10 bodů) Ať je G souvislý neorientovaný graf a všechny jeho vrcholy mají sudý stupeň. Označme jako $(G - v)$ graf, který vznikne z grafu G po odstranění vrcholu v a hran incidentních s vrcholem v. Označme jako $pk(G - v)$ počet komponent souvislosti grafu $G - v$. Ukažte, že pro libovolný vrchol v grafu G platí

$$pk(G - v) \leq \frac{1}{2} d(v).$$

Úloha 7 (10 bodů) Jsou dány dvě kupky sirek (Kupka 1 a Kupka 2), Kupka 1 obsahuje 3 sirky, Kupka 2 obsahuje 2 sirky. Dva hráči (Hráč 1 a Hráč 2) hrají hru s následujícími pravidly:

1. Hráči se střídají na tahu, začíná Hráč 1.
2. Hráč na tahu si vybere jednu z kupek (obsahující $n > 0$ sirek) a odebere z ní x sirek ($1 \leq x \leq n$).
3. Vyhrává hráč, po jehož tahu jsou obě kupky sirek prázdné (obsahují 0 sirek).

Má některý z hráčů výherní strategii? Pokud ano, který? Pokud ne, dokažte proč. (Sestavte graf odpovídající stavovému prostoru hry ze zadání. Rozhodněte, zda může Hráč 1 či Hráč 2 vždy volit svůj tah tak, aby si zachoval možnost výhry pro libovolný protihráčův následující protitah.)