V každé úloze můžete předpokládat, že pracujeme s jazykem predikátové logiky, ve kterém jsou všechny zmíněné řetězce symbolů sentencemi.

**Upozornění k řešení** V předložených řešeních je argumentace zcela minimální: především u tvorby interpretací doporučujeme ve zkoušce zdůvodnění rozšířit.

**Úloha 1 (10 bodů)** Rozhodněte, zda platí následující důsledek. **Pozorně čtěte závorky! Pozorně čtěte závorky! Pozorně čtěte závorky!**

$$\forall x((\exists y M(x,y)) \Rightarrow \exists y(M(x,y) \wedge \forall z M(y,z))),\ \ \exists x \exists y M(x,y) \vdash \exists x \forall y M(x,y)$$

(*Každý, kdo někoho miluje, miluje někoho, kdo miluje všechny. Někdo někoho miluje. Proto někdo miluje všechny.*)

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

**Řešení** Logický důsledek platí. Předvedeme důkaz přirozenou dedukcí.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\forall x((\exists y M(x,y)) \Rightarrow \exists y(M(x,y) \wedge \forall z M(y,z)))$ | P |
| 2. | $\exists x \exists y M(x,y)$ | P |
| 3. | $a : \exists y M(a,y)$ | W |
| 4. | $(\exists y M(a,y)) \Rightarrow \exists y(M(a,y) \wedge \forall z M(y,z))$ | e$\forall x$, 3 |
| 5. | $\exists y(M(a,y) \wedge \forall z M(y,z)$ | e$\Rightarrow$, 3, 4 |
| 6. | $b : M(a,b) \wedge \forall z M(b,z)$ | W |
| 7. | $\forall z M(b,z)$ | e$\wedge_2$, 5 |
| 8. | $y_0$ | D |
| 9. | $M(b,y_0)$ | e$\forall z$, 7 |
| 10. | $\forall y M(b,y)$ | i$\forall y$, 8–9 |
| 11. | $\exists x \forall y M(x,y)$ | i$\exists x$, 10 |
| 12. | $\exists x \forall y M(x,y)$ | e$\exists y$, 5, 6–11 |
| 13. | $\exists x \forall y M(x,y)$ | e$\exists x$, 2, 3–12 |

**Úloha 2 (10 bodů)** Rozhodněte, zda je následující množina sentencí splnitelná.

$$S = \{\exists x \exists y R(x,y),\ \exists x \forall y (x = y),\ \exists x \exists y \neg R(x,y)\}$$

Pokud je množina $S$ splnitelná, sestrojte její model. Pokud není splnitelná, odvoďte přirozenou dedukcí z $S$ spor.

**Řešení** Množina $S$ je nesplnitelná. Předvedeme odvození sporu logickou dedukcí.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\exists x \exists y R(x,y)$ | P |
| 2. | $\exists x \forall y (x = y)$ | P |
| 3. | $\exists x \exists y \neg R(x,y)$ | P |
| 4. | $a : \forall y (a = y)$ | W |
| 5. | $b : \exists y R(b,y)$ | W |
| 6. | $c : R(b,c)$ | W |
| 7. | $a = b$ | e$\forall y$, 4 |
| 8. | $b = a$ | sym$=$, 7 |
| 9. | $a = c$ | e$\forall y$, 4 |
| 10. | $c = a$ | sym$=$, 9 |
| 11. | $R(a,c)$ | e$=$, 8, 6 |
| 12. | $R(a,a)$ | e$=$, 10, 11 |
| 13. | $R(a,a)$ | e$\exists y$, 5, 6–12 |
| 14. | $R(a,a)$ | e$\exists x$, 1, 5–13 |
| 15. | $b : \exists y \neg R(b,y)$ | W |
| 16. | $c : \neg R(b,c)$ | W |
| 17. | $a = b$ | e$\forall y$, 4 |
| 18. | $b = a$ | sym$=$, 17 |
| 19. | $a = c$ | e$\forall y$, 4 |
| 20. | $c = a$ | sym$=$, 19 |
| 21. | $\neg R(a,c)$ | e$=$, 18, 16 |
| 22. | $\neg R(a,a)$ | e$=$, 20, 21 |
| 23. | $\neg R(a,a)$ | e$\exists y$, 15, 16–22 |
| 24. | $\neg R(a,a)$ | e$\exists x$, 3, 15–23 |
| 25. | $\bot$ | e$\neg$, 14, 24 |
| 26. | $\bot$ | e$\exists x$, 2, 4–25 |

**Úloha 3 (10 bodů)** Rozhodněte, zda platí následující důsledek.

$$\exists x (P(x) \wedge \forall y (P(y) \Rightarrow x = y)) \vdash \exists x P(x) \wedge \forall y \forall z ((P(y) \wedge P(z)) \Rightarrow y = z)$$

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

**Řešení** Logický důsledek platí. Předvedeme důkaz přirozenou dedukcí.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\exists x(P(x) \wedge \forall y(P(y) \Rightarrow x = y))$ | P |
| 2. | $x_0 : P(x_0) \wedge \forall y(P(y) \Rightarrow x_0 = y)$ | W |
| 3. | $P(x_0)$ | e$\wedge_1$, 2 |
| 4. | $\exists x P(x)$ | i$\exists x$, 2 |
| 5. | $\forall y(P(y) \Rightarrow x_0 = y)$ | e$\wedge_2$, 2 |
| 6. | $y_0$ | D |
| 7. | $z_0$ | D |
| 8. | $P(y_0) \wedge P(z_0)$ | P |
| 9. | $P(y_0)$ | e$\wedge_1$, 8 |
| 10. | $P(z_0)$ | e$\wedge_2$, 8 |
| 11. | $P(y_0) \Rightarrow x_0 = y_0$ | e$\forall y$, 2 |
| 12. | $P(z_0) \Rightarrow x_0 = z_0$ | e$\forall y$, 2 |
| 13. | $x_0 = y_0$ | e$\Rightarrow$, 9, 11 |
| 14. | $x_0 = z_0$ | e$\Rightarrow$, 10, 12 |
| 15. | $y_0 = z_0$ | e=, 13, 14 |
| 16. | $(P(y_0) \wedge P(z_0)) \Rightarrow y_0 = z_0$ | i$\Rightarrow$, 8–15 |
| 17. | $\forall z(P(y_0) \wedge P(z)) \Rightarrow y_0 = z$ | i$\forall z$, 7–16 |
| 18. | $\forall y \forall z(P(y) \wedge P(z)) \Rightarrow y = z$ | i$\forall y$, 6–17 |
| 19. | $\exists x P(x) \wedge \forall y \forall z(P(y) \wedge P(z)) \Rightarrow y = z$ | i$\wedge$, 4, 18 |
| 20. | $\exists x P(x) \wedge \forall y \forall z((P(y) \wedge P(z)) \Rightarrow y = z)$ | e$\exists x$, 1, 2–19 |

**Úloha 4 (10 bodů)** Rozhodněte, zda je následující množina sentencí splnitelná.

$$M = \{\neg\forall x P(x),\ \neg\forall x \neg P(x),\ \exists x \neg P(x), \exists x P(x)\}$$

Pokud je množina $M$ splnitelná, sestrojte její model. Pokud není splnitelná, odvoďte přirozenou dedukcí z $M$ spor.

**Řešení** Množina $M$ je splnitelná. Jejím modelem je například interpretace $\mathcal{I}$, jejímž universem $U$ je množina $\{u, v\}$, kde

$$[\![P]\!] = \{u\}.$$

Ověřit, že sentence z množiny $M$ jsou v interpretaci $\mathcal{I}$ pravdivé, je snadné: v $U$ existuje prvek náležící do $[\![P]\!]$ i prvek nenáležící do $[\![P]\!]$, což ověřuje pravdivost posledních dvou sentencí. První sentence je sémanticky ekvivalentní sentenci třetí, druhá sentence je sémanticky ekvivalentní sentenci čtvrté.