Úloha 1 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda platí následující důsledek.

$$\forall x(\forall y(C(y,x) \Rightarrow F(y)) \Rightarrow H(x)),$$
$$\forall x(G(x) \Rightarrow F(x)),$$
$$\forall x(\exists y(C(x,y) \wedge G(y)) \Rightarrow G(x))$$
$$\vdash \forall x(G(x) \Rightarrow H(x))$$

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

Úloha 2 (-5 ... 11 bodů) (Predikátová logika.) Rozhodněte, zda je následující množina sentencí splnitelná.

$$S = \{\exists x \forall y R(x,y),\ \forall x \forall y((\neg(x=y) \wedge R(x,y)) \Rightarrow \neg R(y,x)),\ \forall y \exists x R(x,y)\}.$$

Pokud je množina S splnitelná, sestrojte její model. Pokud není splnitelná, odvoďte přirozenou dedukcí z S spor.

Úloha 3 (0 ... 8 bodů) Zvolte si vhodný jazyk $\mathcal{L}$ predikátové logiky a sestrojte v něm množinu sentencí M takovou, že její modely jsou přesně interpretace jazyka $\mathcal{L}$ s nekonečným universem. (To jest, interpretace $\mathcal{I}$ s konečným universem nejsou modelem M, a interpretace $\mathcal{I}$ s nekonečným universem jsou modelem M.) Pečlivě zdůvodněte, proč má vaše množina M požadovanou vlastnost.

Úloha 4 (-5 ... 11 bodů) Připomenutí: Pro neorientovaný graf $G = (V, E)$ je jeho *doplňkový graf* graf $G^{dop} = (V, F)$, kde $\{x, y\} \in F$ právě tehdy, když $\{x, y\} \notin E$. Neorientovaný graf se strukturou kružnice o n vrcholech označujeme jako C_n.

1. Nakreslete grafy C_4 a $(C_4)^{dop}$.
2. Je doplňkový graf nějaké kružnice C_n znovu kružnice? Pokud ano, nalezněte jedno takové n a pečlivě ověřte.
3. Popište všechna přirozená čísla $n \in \mathbb{N}$, pro která platí $(C_n)^{dop} \cong C_n$. Svou odpověď pečlivě zdůvodněte. (To jest, všechna n, pro která je doplněk kružnice C_n znovu kružnice.)

Úloha 5 (-5 ... 11 bodů)

1. Sestrojte neorientovaný graf $G = (V, E)$ obsahující kružnici a ukažte, že v něm existuje dvojice vrcholů $x, y \in V$ taková, že z x do y vedou dvě různé neorientované cesty.
2. Dokažte, že pokud v neorientovaném grafu H existuje mezi každou dvojicí vrcholů $x, y \in V$ *právě jedna* neorientovaná cesta, pak H neobsahuje kružnici.

Úloha 6 (0 ... 8 bodů) Připomenutí: orientovaný graf G nazveme *turnajem*, pokud je to po zapomenutí orientace hran úplný graf. Vrchol v v turnaji G je *lama*, pokud je jeho výstupní stupeň roven nule (tedy $d^{out}(v) = 0$).

Rozhodněte, zda platí následující tvrzení:

Pokud turnaj G neobsahuje lamu, pak obsahuje orientovaný cyklus délky 3.

Úloha 3 (2 body) *Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:*

$$\text{Pred} = \{S\}, ar(S) = 2,$$
$$\text{Func} = \{\},$$
$$\text{Kons} = \{\}.$$

Ve kterých interpretacích jazyka L je sentence $\forall x \forall y(S(x,y) \Rightarrow \exists z(S(z,x) \wedge S(y,z)))$ pravdivá?

1. $U = \emptyset$, $[S] = \emptyset$.
2. $U = \{1,2,3\}$, $[S] = U \times U$.
3. $U = \mathbb{Z}$, $[S] = \{(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m < n\}$.
4. $U = \mathbb{N}$, $[S] = \{(0,n) \mid n \in \mathbb{N}\}$.
5. $U = \mathbb{N}$, $[S] = \{(0,n) \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{(n,0) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Úloha 4 (2 body) O prostém neorientovaném grafu G bez smyček jste se dozvěděli, že má 16 vrcholů a 14 hran. Která z následujících tvrzení o něm *nutně* platí?

1. G má barevnost maximálně 3.
2. V G existuje neorientovaná cesta délky 2.
3. G není souvislý.
4. G je graf bez kružnic s přesně dvěma komponentami souvislosti.
5. G obsahuje alespoň jednu kružnici.

Úloha 5 (2 body) *Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:*

1. Každý orientovaný graf, který obsahuje kružnici (neorientovaný cyklus), obsahuje i *orientovaný* cyklus.
2. Každý orientovaný graf, který je acyklický (neobsahuje orientované cykly) a má $n > 3$ vrcholů, má i n silně souvislých komponent.
3. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy má jádro.
4. Každý orientovaný graf s $n > 3$ vrcholy, který je silně souvislý, obsahuje orientovaný cyklus.
5. Existuje orientovaný graf, který není acyklický (tj., obsahuje orientovaný cyklus), a přitom má jádro.