

Úloha 1 (2 body) Je dána množina formulí výrokové logiky

$$M = \{(a \wedge b) \Rightarrow b, \quad (c \vee \neg c), \quad (\delta \vee \alpha) \Rightarrow \neg c\}$$

Rozhodněte, které z následujících formulí jsou sémantickým důsledkem množiny M .

- $c \Rightarrow \neg b,$
- $b \Rightarrow (a \wedge b),$
- $a \Rightarrow (\neg b \vee c),$
- $\neg c \Rightarrow (\neg a \wedge \neg b),$
- $(\neg c \vee \neg \neg c),$

Úloha 2 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\text{Pred} = \{P, Q, R\}, ar(P) = ar(Q) = 1, ar(R) = 2.$$

$$\text{Func} = \{g\}, ar(g) = 2,$$

$$\text{Kons} = \{a\}.$$

Interpretace I jazyka L je dána následovně (připomenutí: 0 je přirozené číslo):

$$\begin{aligned}U &= \mathbb{Z} \\ \llbracket P \rrbracket &= \{-5, 3, 13\} \\ \llbracket Q \rrbracket &= \{z \in \mathbb{Z} \mid z < 0\} \\ \llbracket R \rrbracket &= \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m \leq n\} \\ \llbracket g \rrbracket : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z} \\ (m, n) &\mapsto m - n \\ \llbracket a \rrbracket &= 2\end{aligned}$$

Rozhodněte, které ze sentencí níže jsou v interpretaci I pravdivé.

- $Q(a).$
- $\exists y(P(y) \wedge \neg Q(g(a, y))).$
- $\forall x \forall y \forall z \ g(x, g(y, z)) = g(g(x, y), z).$
- $\forall x \forall y ((P(x) \wedge P(y)) \Rightarrow Q(g(x, y))).$
- $\forall x (Q(x) \Rightarrow \exists y (P(y) \wedge Q(g(x, y)))).$

Úloha 3 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\begin{aligned}\text{Pred} &= \{S\}, ar(S) = 2, \\ \text{Func} &= \{\}, \\ \text{Kons} &= \{\}.\end{aligned}$$

Ve kterých interpretacích jazyka L je sentence $\forall x \forall y (S(x, y) \Rightarrow \exists z (S(z, x) \wedge S(y, z)))$ pravdivá?

$$U = \emptyset, [S] = \emptyset.$$

$$U = \{1, 2, 3\}, [S] = U \times U.$$

$$U = \mathbb{Z}, [S] = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m < n\}.$$

$$U = \mathbb{N}, [S] = \{(0, n) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

$$U = \mathbb{N}, [S] = \{(0, n) \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{(n, 0) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Úloha 4 (2 body) O prostém neorientovaném grafu G bez smyček jste se dozvěděli, že má 16 vrcholů a 14 hran. Která z následujících tvrzení o něm nutně platí?

G není souvislý.

G je graf bez kružnic s přesně dvěma komponentami souvislosti.

G obsahuje alespoň jednu kružnici.

G má barevnost maximálně 3.

V G existuje neorientovaná cesta délky 2.

Úloha 5 (2 body) Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

Každý orientovaný graf, který obsahuje kružnici, obsahuje i cyklus.

Každý orientovaný graf, který je acyklický a má n vrcholů, má i n silně souvislých komponent.

Každý strom, který je orientovaný, má kořen.

Každý orientovaný graf, který má kořen, je silně souvislý.

Každý orientovaný graf, který je silně souvislý, má kořen.