1) Maximum: největší prvek M (pokud existuje)

Minimum: nejmenší prvek M (pokud existuje)

Supremum: nejmenší horní mez pro shora omezenou M, pro neomezenou $+\infty$

Infimum: největší dolní mez pro zdola omezenou M, pro neomezenou $-\infty$

Věta: Každá neprázdná množina reálných čísel má supremum i infimum.

—

2) Limita (volně) vyjadřuje bod, ke kterému se hodnoty zadané funkce nebo posloupnosti libovolně blíží.

Limita posloupnosti je hromadnou hodnotou posloupnosti. Hromadná hodnota posloupnosti je limitou některé vybrané posloupnosti. Pokud k každému okolí bodu a leží nekonečně mnoho členů posloupnosti (a_n)

Nejmenší hromadná hodnota posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá limes inferior, $\liminf_{n\to\infty} a_n$,

Největší hromadná hodnota posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá limes superior, $\limsup_{n\to\infty} a_n$

(okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ o poloměru $r>0$ je $U(a,r) = (a-r, a+r)$)

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má limitu $a \in \bar{\mathbb{R}}$, pokud pro každé okolí U bodu a existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna přirozená $n > n_0$ je $a_n \in U$. Značíme

$\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$, $a_n \to a$ pro $n\to\infty$.

Posloupnost splňující limitu se nazývá konvergentní, s nevlastní limitou divergentní.

Věta: Každá neklesající posloupnost má limitu rovnou supremu množiny (±∞) jejích členů.

Každá nerostoucí posloupnost má limitu rovnou infimu množiny jejích členů.

Věta: (o jednoznačnosti limity) Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Věta: Konvergentní posloupnost je omezená.

Věta: Každá posloupnost má v $\bar{\mathbb{R}}$ alespoň jednu hromadnou hodnotu (omezená posl. vlastní)

Věta: Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má limitu právě tehdy, když má jedinou hromadnou hromadnou hodnotu

tj. právě tehdy, když všechny z ní vybrané posloupnosti mají stejnou limitu (tj. právě tehdy,

když $\lim_{n\to\infty} \inf a_n = \lim_{n\to\infty} \sup a_n$

—

3) D_f = definiční obor, $H(f)/R(f)$ obor hodnot

mocninné funkce ($y = x^n$)	D_f = — n liché $\mathbb{R}$ / n sudé $\mathbb{R}\geq 0$	R_f = — n liché $\mathbb{R}$ / n sudé $\mathbb{R}\geq 0$	Spojitost: spojitá pro všech. $x \in D_f$	Limita: každá na n
exponenciální funkce ($y = a^x, a>0$)	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}>0$	pro všechna $x \in D_f$	$a>0$ $\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$ $0<a<1$ $\lim_{x\to\infty} a^x = 0$
sin x, cos x	$\mathbb{R}$	$-1 \leq y \leq 1$	pro všech. $x \in D_f$	nelze obecně limity
tangens tg x	$\mathbb{R} \setminus (2n+1)\cdot\frac{\pi}{2}$	$\mathbb{R}$	vertikální asymptoty pro obor hodnot ano nemá spojitá na D_f	$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}-} \operatorname{tg} x = \infty$ $\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}+} \operatorname{tg} x = -\infty$
inverzní mocninné ($y = x^{1/n}, n>0$)	n liché $\mathbb{R}$ n sudé $\mathbb{R}\geq 0$	n liché $\mathbb{R}$ n sudé $\mathbb{R}\geq 0$	pro všech. $x \in D_f$	$\lim_{x\to\infty} x^{1/n} = \infty$ n liché $x\to -\infty$ $= -\infty$
logaritmické $\log_a x$ $a>0, a\neq 1$	$\mathbb{R}>0$	$\mathbb{R}$	pro všech. $x \in D_f$	$\lim_{x\to 0+} \log_a x = -\infty$ $\lim_{x\to\infty} \log_a x = \infty$
arkussinus x	$-1 \leq x \leq 1$	$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$	spojitá na D_f	$\lim_{x\to 1-} \arcsin x = \pi/2$ $\lim_{x\to -1+} \arcsin x = -\pi/2$
arkuskosinus x	$-1 \leq x \leq 1$	$0 \leq y \leq \pi$	—11—	$\lim_{x\to -1+} \arccos x = \pi$ $\lim_{x\to 1-} \arccos x = 0$
arkustangens x	$\mathbb{R}$	$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$	—11—	$\lim_{x\to -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$ $\lim_{x\to +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$

4) Monotónní případ se její hodnoty zvyšují nebo zmenšují, kdyžse zvyšují hodnoty argumentů.

Rostoucí	$f(x) < f(y)$	nerostoucí	$f(x) \geq f(y)$	pro $\forall x \forall y \in A$, $x<y$
klesající	$f(x) > f(y)$	neklesající	$f(x) \leq f(y)$	$A \subset D(f)$

Extrémy - body kde funkce dosahuje lokálních či globálních minim, maxim, vesměs okolí nějakého nazýváme

lokální maximum : bod $x = a$ je lokálním maximem funkce f pokud existuje okolí bodu a minimum

kde pro všechny body x v tomto okolí platí $f(a) \geq f(x)$, ostře $f(a) > f(x)$
$f(a) \leq f(x)$, ostře $f(a) < f(x)$.

Věta: Nechť f je funkce definovaná v okolí bodu a a nechť $f'(a)=0$

1) jestliže $f''(a) > 0$, pak $f(a)$ je ostré lokální minimum funkce f.
2) $<$ maximum

5) Okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ o poloměru $r>0$ je $U(a,r) = (a-r, a+r)$

Prstencové okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ o pol. $r>0$ je $P(a,r) = (a-r, a) \cup (a, a+r)$

jednostranná okolí, levé a pravé, bodu $a \in \mathbb{R}$ o poloměru $r>0$ jsou

$U_-(a,r) = (a-r, a\rangle$ $\quad U_+(a,r) = \langle a, a+r)$

$P_-(a,r) = (a-r, a)$ $\quad P_+(a,r) = (a, a+r)$

Řekneme, že funkce f definovaná v prstencovém okolí bodu $a \in \bar{\mathbb{R}}$ má v bodě a limitu $b \in \bar{\mathbb{R}}$
pokud ke každému okolí U bodu b existuje prstencové okolí P bodu a, takž že $f(P) \subset U$ značíme

$\lim_{x \to a} f(x) = b$ $\quad f(x) \xrightarrow{x \to a} b$ $\quad f(x) \to b$ pro $x \to a$

Řekneme, že funkce f definovaná v levém (pravém) prstencovém okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ má v bodě a jednostrannou limitu zleva (zprava) rovnu $b \in \bar{\mathbb{R}}$, pokud ke každému okolí U bodu b existuje levé (pravé) prstencové okolí P bodu a takž že $f(P) \subset U$ značíme

$\lim_{x \to a-} f(x) = b$ $\quad f(a-) = b$

$\lim_{x \to a+} f(x) = b$ $\quad f(a+) = b$

Věta: Limita funkce v vlastním bodě existuje právě tehdy když v tomto bodě ex. obě jednostranné limity a jsou stejné (pak se jim rovná i limita funkce)

Věta: (o jednoznačnosti) Každá funkce má v každém bodě nejvýše jednu limitu.

Věta: Pro funkci f definovanou v prstencovém okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ $\lim_{x \to a} f(x) = b$ právě tehdy když

$\lim_{x \to a-} f(x) = b = \lim_{x \to a+} f(x)$

6) Řekneme, že funkce f je spojitá v bodě $a \in D(f)$, pokud ke každému okolí V bodu $f(a)$ existuje okolí U bodu a tak, že $f(U \cap D(f)) \subset V$

Říkáme, že funkce f je spojitá, pokud je spojitá v každém bodě svého def. oboru

Řekneme, že funkce f je spojitá na množině $A \subset D(f)$, pokud je spojitá funkce $g(x) = f(x)$, $D(g) = A$

Věta: Funkce f definovaná v okolí bodu a je v tomto bodě spojitá právě tehdy když $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Věta: Mocniny, exponenciela, goniometrické funkce a jejich inverzní jsou spojité

Věta: (o maximu a minimu funkce, Weierstrassova) Spojitá funkce na uzavřeném intervalu nabývá nejmenší a největší hodnoty.

(Každá spojitá funkce na uzavřeném intervalu $\langle a,b \rangle$ nabývá maximum, $\exists c,d \in \langle a,b \rangle$, $\forall x \in \langle a,b \rangle$ $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$)

Věta: (o mezihodnotě) Je-li funkce f spojitá na intervalu I a nabývá-li v něm hodnot m a M, $m < M$, pak v tomto intervalu nabývá všech hodnot z intervalu $\langle m, M \rangle$

Věta: Každá spojitá funkce na intervalu má primitivní funkci

(primitivní funkce je funkce jejíž derivací je daná funkce)

Věta: Jeli f spojitá funkce na intervalu $\langle a,b \rangle$ pak $\int_a^b f(x)\,dx$ existuje. (určitý Riemannův integrál)

("plocha pod grafem funkce f ose x")

(Funkce je spojitá v každém bodě, ve kterém má konečnou derivaci)

7) Nechť je f funkce definovaná na okolí bodu a. Derivace funkce f v bodě a je

$$\frac{df}{dx}(a) = f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

pokud $a + h = x$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Věta: Funkce je spojitá v každém bodě, ve kterém má vlastní derivaci:

$(C)' = 0$ $\quad x \in \mathbb{R}, C \in \mathbb{R}$

$(x^a)' = a x^{a-1}$ $\quad x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{N}$; $x \neq 0, a = \mathbb{Z}$; $x > 0, a \in \mathbb{R}$

$(e^x)' = e^x$ $\quad x \in \mathbb{R}$

$(a^x)' = a^x \cdot \ln(a)$ $\quad a > 0, a \neq 1$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$ $\quad x > 0$

$(\operatorname{arctg})' = \frac{1}{x^2+1}$

$(\arcsin)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad x \in (-1,1)$

8) Věta (Lagrangeova) (o přírůstku funkce) Nechť je funkce f spojitá na $\langle a,b \rangle$ a má derivaci v každém bodě (a,b).

Pak existuje $c \in (a,b)$ takové že $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b-a)$ $\Rightarrow f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

(průměrný přírůstek na intervalu se rovná derivaci v nějakém bodě)

monotonie a podle hodnoty derivace funkce můžeme určit kde roste / klesá

$f'(x) > 0$ pro všechny x z intervalu (a,b) $\rightarrow$ rostoucí na intervalu

$f'(x) < 0$ klesající

$f'(x) = 0$ $\rightarrow$ stacionární bod, musíme ověřit extrém (druhá derivace $f''(a) > 0$ ostré lok. min f, < 0 ostré lok. max f)

9) Funkce F se nazývá primitivní funkce k funkci f na intervalu I jestliže $F' = f$ na I.

- Věta: spojitá funkce na intervalu má primitivní funkci
- množinu všech primitivních funkcí k funkci f na intervalu I nazýváme neurčitým integrálem $\int f$ na I
- pokud je nepřáčaná $\int f(x)\,dx = F + c$
- Funkce f musí být definovaná na nějakém intervalu
- (Funkce f musí být na daném intervalu omezená a nekonečně bodů nesmí být)

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c \qquad a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c \qquad x \in (-\infty, 0),\ x \in (0, \infty)$$

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a} e^{ax} + c \qquad x \in \mathbb{R}\ (a \neq 0)$$

$$\int \sin ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax + c \qquad a \neq 0 \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\sin ax + c \qquad a \neq 0 \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \operatorname{arctg} x + c \qquad x \in \mathbb{R}$$

10) je-li pro omezenou funkci f na $\langle a,b\rangle$ supremum dolních integrálních součtů rovno infimu horních integrálních součtů nazýváme toto hodnotu určitý (Riemannův) integrál funkce f na $\langle a,b\rangle$
čísla a, b se nazývají horní/dolní mez integrálu značí $\int_a^b f(x)\,dx$

Věta: Pro omezenou funkci f na $\langle a,b\rangle$ existuje $\int_a^b f(x)\,dx$ právě tehdy, když existuje posloupnost $(D_n)_{n=1}^{\infty}$ dělení $\langle a,b\rangle$ takových, že

věta 1) $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n) = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n)$. V takovém případě je integrál roven limitám.

věta 2) $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} (\overline{S}(f, D_n) - \underline{S}(f, D_n)) = 0$.

Věta: Monotónní funkce na uzavřeném intervalu má určitý integrál.

Věta: Spojitá funkce na uzavřeném intervalu má určitý integrál.

11) Vztah mezi určitým a neurčitým integrálem je dán Newton-Leibnizova věta

Věta: Nechť funkce f je omezená na $\langle a,b\rangle$ $\int_a^b f$ existuje a F je primitivní funkce k f na $\langle a,b\rangle$

Pak $\int_a^b f(x)\,dx = F(b-) - F(a+)$

Spojitá funkce na intervalu má primitivní funkci

neurčitý $\Rightarrow$ určitý $\quad \int_a^b f(x)\,dx = F(B) - F(a)$

určitý $\Rightarrow$ neurčitý věta o integrálním počtu, pokud f spojitá, a pevný bod, funkce F definovaná

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

je primitivní funkcí f.

12) Nekonečná číselná řada je výraz $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 \dots$, kde $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ je posloupnost čísel. Číslo a_k je k-tý člen, $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + \dots + a_n$ je n-tý částečný součet (s_n), limita posloupnosti částečných součtů je součet.

Řekneme, že řada konverguje, má-li konečný součet, diverguje má-li nekonečný součet osciluje nemá-li součet.

Geometrická řada s kvocientem q je řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^{k-1} = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 \dots$

Věta: $\sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^{k-1} = \frac{a_1}{1-q}$ pro $|q|<1$ | pro $|q|>1$ a $a_1 \neq 0$ nekonverguje

13) Řekneme, že řada konverguje, má-li konečný součet, diverguje nekonečný), osciluje nemá.

Řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje absolutně, pokud konverguje $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$

Věta: absolutně konvergentní řada konverguje.

Věta: (Nutná podmínka konvergence) Jestliže $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje, pak $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$

Věta: (podílové kritérium) Nechť $a_k \neq 0$ pro každé $k \in \mathbb{N}$

1) Je-li $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q < 1$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje absolutně.

Věta: limitní tvar podílového $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$, pak $\sum_{k=1}^{\infty}$ konverguje abs.

Věta: (odmocninové kritérium)

1) Je-li $\sqrt[k]{|a_k|} \leq q < 1$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_k$ konverguje absolutně.

Věta: limitní tvar odmocninový $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \leq 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_k$ kon. abs.

Věta (integrální kritérium) Nechť f je nerostoucí funkce na $\langle k_0, +\infty)$, $f(k) = |a_k|$ pro $k \geq k_0$

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverg. abs. právě tehdy když konverguje $\int_{k_0}^{+\infty} f(x)\,dx$.

(f derivuj, zjistím pro jaká x zessu $x>2$ -> $\int_2^{\infty} |f(x)| = \dots < \infty$ => abs. konverguje

Věta (Leibnizovo kritérium)

V1) Je-li $(b_k)_{k=1}^{\infty}$ nerostoucí posloupnost s nulovou limitou, pak $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} b_k$ konverguje

V2) alternující (střídá. znaménka) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ a $\lim_{k\to\infty} |a_k| = 0$ a nerostoucí $(|a_k|)_{k=1}^{\infty}$ konverguje