1. Maximum je největší prvek množiny

Minimum je nejmenší prvek množiny

Supremum je nejmenší horní závora

Infimum je největší dolní závora

Horní závora z je libovolné číslo z, pro které platí, že

$\forall x \in M, \; x \leq z$

Dolní závora — " —, $\forall x \in M, \; x \geq z$

Shora omezená $\Leftrightarrow$ má horní závoru $\Leftrightarrow \sup M \in \mathbb{R}$

Zdola omezená $\Leftrightarrow$ má dolní závoru $\Leftrightarrow \inf M \in \mathbb{R}$

omezená $\Leftrightarrow$ zdola i shora

pokud $\sup / \inf \in \overline{\mathbb{R}}$ nemá horní závoru

pokud ex. $\max M \Rightarrow \sup M = \max M$

— " — $\min M \Rightarrow \inf M = \min M$

example:

$M = \mathbb{N}$, max neex., $\min = \inf = 1$, $\sup +\infty$

$M = \langle 1, 3)$, $\min = \inf = 1$, max neex, $\sup = 3$

$M = \emptyset$ min / max neex, $\sup -\infty$, $\inf +\infty$

2. Limita

Funkce f definována v prstencovém okolí $a \in \overline{\mathbb{R}}$ má v bodě a limitu $b \in \overline{\mathbb{R}}$, pokud ke každému okolí U bodu b existuje prstencové okolí P bodu a takový, že $f(P) \subset U$.

Okolí bodu

Okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ o poloměru $r > 0$ je $U(a,r) = \{x \in \mathbb{R} : |x-a| < r\}$.

Prstencové okolí bodu a o poloměru $r > 0$ je $P(a,r) = U(a,r) \setminus \{a\}$

Okolí bodu $\pm\infty$ jsou $U(-\infty, r) = P(-\infty, r) = (-\infty, r)$
$U(\infty, r) = P(\infty, r) = (r, +\infty)$

Posloupnost

(nekonečná) posloupnost (reálných čísel) je každé zobrazení $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Značíme ho $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, a_n je n-tý člen posloupnosti.

Limita posloupnosti

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má limitu $a \in \overline{\mathbb{R}}$ $\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)$, pokud pro každé okolí U bodu a existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n > n_0$ je $a_n \in U$.

Hromadná hodnota

Číslo $a \in \mathbb{R}$ je hromadná hodnota posloupnosti, pokud v každém okolí $U(a)$ leží nekonečně mnoho jejích členů.
Každá posloupnost má alespoň jednu hromadnou hodnotu.

Limes superior ($\limsup_{n\to\infty} a_n$) je supremum množiny hromadných hodnot.

Limes inferior ($\liminf_{n\to\infty} a_n$) je infimum množiny hromadných hodnot.

Limita posloupnosti je její hromadná hodnota. Hromadná hodnota posloupnosti je limitou některé její vybrané podposloupnosti.
(vybraná posloupnost – vybereme některé a_n, podle n vzestupně)

example: $1, 2, 1, 2, 1, 2 \ldots$
vybrané podposloupnosti: $A = 1, 1, 1, 1 \ldots$ } hromadné hodnoty 1 & 2
$B = 2, 2, 2, 2 \ldots$
$\lim_{n\to\infty} A = 1$ $\lim_{n\to\infty} B = 2$

$((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$ vybrané posloupnosti: $(-1)_{n=1}^{\infty}$ hrom. hodn. -1
$(1)_{n=1}^{\infty}$ hrom. hodn. 1

$\limsup((-1)^n|_{n=1}^{\infty} = 1$
$\liminf((-1)^n|_{n=1}^{\infty} = -1$

Posloupnost s konečnou limitou je konvergentní

Konvergentní posloupnost je omezená

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má limitu, právě tehdy, když má nanejvýš jednu, tj. právě tehdy když všechny z ní vybrané posloupnosti mají stejnou limitu, tj. právě tehdy když $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n$

example: $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

(3.) Funkce f je zobrazení $A \to \mathbb{R}$ kde $A \subset \mathbb{R}$ je neprázdná. Množina je definiční obor funkce f, značíme $D(f)$, množina všech $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$ je obor hodnot funkce f, značíme $R(f)$.

Graf funkce f je $\{[x, f(x)], x \in D(f)\}$

prostě – jednomu x přiřazuje y

na – pro každé $y \in R(f)$ ex. $x \in D(f)$

bijekce – prostá a na

Spojitost

Funkce f je spojitá v bodě $a \in D(f)$, pokud ke každému okolí U bodu $f(a)$ existuje okolí V bodu a tak, že $f(V \cap D(f)) \subset U$.

Řekneme, že funkce f je spojitá, jestliže je spojitá v každém bodě $D(f)$.

Řekneme, že funkce f je spojitá na množině $A \subset D(f)$, pokud je spojitá funkce $g(x) = f(x)$, $D(g) = A$

Limita zobr. funkce

$\lim_{x \to a} f(x) = 0$ iff $\lim_{x \to a} |f(x)| = 0$

Limita součtu, rozdílu, součinu a podílu.

Jestliže pro funkce f, g existují limity $\lim_{x \to a} f(x)$ a $\lim_{x \to a} g(x)$ (vlastní nebo nevlastní) pak

$$\lim_{x \to a} (f \pm g)(x) = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$$

$$\lim_{x \to a} (fg)(x) = \left(\lim_{x \to a} f(x)\right) \cdot \left(\lim_{x \to a} g(x)\right)$$

$$\lim_{x \to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$$

je-li $\lim_{x \to a} f(x) > 0$, $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ a

$g(x) > 0$ na prstencovém okolí $a \in \overline{\mathbb{R}}$ pak

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty \qquad \left|\frac{\text{kladné}}{0}\right| = +\infty$$

je-li $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, g je omezená na prstencovém okolí

$a \in \overline{\mathbb{R}}$, pak $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0$ $\quad |0 \cdot \text{om.}| = 0$

$\left|\frac{\text{om}}{\pm\infty}\right| = 0$

je-li $\lim_{x\to a} f(x) = b \in \{\pm\infty\}$ a

$g(x)$ je omezená na prstd. okolí $a \in \overline{\mathbb{R}}$, pak $|\pm\infty \pm \text{om}| = \pm\infty$

$\lim_{x\to a} (f(x)+g(x)) = b$

Je-li $f \le g$ na prst. okolí $a \in \overline{\mathbb{R}}$,

$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ $(\lim_{x\to a} g(x) = -\infty)$

$\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$ $(\lim_{x\to a} f(x) = -\infty)$

$|\text{neex.} \pm C| = \text{neex.}$, $|\text{neex} \cdot (C \neq 0)| = \text{neex.}$, $|\text{neex} / C (C \neq 0)| = \text{neex}$

Jestliže $\lim_{x\to a} f(x)$ neexistuje, pak platí:

1) je-li $\lim_{x\to a} g(x)$ konečná, pak $\lim_{x\to a} (f(x) \pm g(x))$ neexistuje

2) $+\infty$ — a nenulová, pak neexistuje $\lim_{x\to a} (f(x) \pm g(x))$ a

$\lim_{x\to a} (|f(x)| g(x))$

Limita složené fce

nechť $a \in \overline{\mathbb{R}}$ a

1) $\lim_{x \to a} f(x) = b \in \overline{\mathbb{R}}$

2) $\lim_{y \to b} g(y) = c \in \overline{\mathbb{R}}$

3) $g(b) = c$ nebo $f(x) \neq b$ na některém prstencovém okolí bodu a

pak $\lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = c$

Spojitost

Nechť funkce f, g jsou spojité v bodě a. Pak platí:

1) funkce $f \pm g$, $f \cdot g$, $|f|$ jsou spojité v bodě a; je-li $g(a) \neq 0$, pak i funkce f/g je spojitá v bodě a.

2) Existuje okolí bodu a, na kterém je funkce f omezená.

3) Je-li $f(a) > 0$, pak $f > 0$ na některém okolí bodu a.

Je-li funkce f spojitá v bodě a, funkce g spojitá v $f(a)$, pak funkce $g \circ f$ je spojitá v bodě a.

Spojité fce na uzavřeném intervalu nabývají minima a maxima.

Je li f spojitá na I a nabývá hodnot m, M, $m < M$, pak v tomto intervalu nabývá všech hodnot z $\langle m, M \rangle$

4. Monotonie

Funkce f je rostoucí (klesající / neklesající / nerostoucí) na množině $A \subset D(f)$, pokud $f(x) < f(y)$ $(>, \leq, \geq)$ pro všechna $x, y \in A$ taková, že $x < y$. Jakékoli z těchto vlastností monotónnosti, rostoucí a klesající pak vždy monotónní.

Věta o monotonii

Je-li f spojitá na intervalu I a má-li v každém vnitřním bodě I derivaci, pak:

1) je-li $f'(x) > 0$ uvnitř I, pak f je rostoucí na I
2) $<$ klesající
3) $\geq$ neklesající
4) $\leq$ nerostoucí
5) $=$ konstantní
6) $g(x)' = f(x)'$ liší se o konstantu

$f'(a) < 0$ je klesající v bodě a
$f'(a) > 0$ je rostoucí v bodě a
$f'(a) = 0$ nic se neví určitě

Extrém

Funkce f má v bodě a ostré minimum (maximum), jestliže $f(b) \geq f(a)$ ($\leq$) na některém prstencovém okolí bodu a.

Loh. extrém = loh. min/max

Ostrý loh. extrém ($<$, $>$)

Má-li f ve bodě a loh. extrém, pak buď $f'(a) = 0$ (a je stacionární bod) nebo $f'(a)$ neexistuje.

Nechť $f'(a) = 0$

1) Je-li $f''(a) > 0$ pak f má v a ostré loh. min.

2) $<$ ostré loh. max

Spojitá f se v okolním intervalu nějaký extrém/minimum, buď v bodě, ve kterém má loh. max/min. nebo v některém z krajních bodů intervalu.

$f''(a) \leq 0$ pak f v a konkávní

$f''(a) \geq 0$ pak f v a konvexní

pokud $f''(a) = 0$ a $f'''(a) \neq 0$ potom v a inflexní bod

(5) LIMITA

definice v otázce 2

JEDNOSTRANNÁ LIMITA

Funkce f definovaná v pasteckovém okolí bodu $a \in \overline{\mathbb{R}}$ má v bodě a limitu zleva (zprava), jestliže platí, že ke každému U okolí bodu b ex. levé (pravé) pasteckové okolí tak, že $f(P^{\pm}) \subset U$

VZTAH LIMIT

Pro funkci f definovanou v pasteckovém okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ je $\lim_{x \to a} f(x) = b$ právě tehdy, když $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = b$

Každá fce má v každém bodě nejvýše jednu limitu

zleva (zprava)

Fce shora/zdola limitou zleva (zprava) v $a \in \overline{\mathbb{R}}$ je omezená na levém (pravém) okolí a

Fce s hodnotou / zápornou limitou zleva/zprava v $a \in \overline{\mathbb{R}}$ je na levém / pravém okolí kladná (záporná)

Monotónní funkce na otevřeném intervalu má v jeho krajních bodech pravidelné jednostranné limity (supremum, infimum)

Fce f je def. v okolí bodu a je v bodě a spojitá zleva / zprava iff $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$

6. SPOJITOST

Funkce f je spojitá v bodě $a \in D(f)$, pokud ke každému okolí U bodu $f(a)$ existuje okolí V bodu a tak, že $f(V \cap D(f)) \subset U$. Funkce je spojitá, je-li spojitá v každém bodě $D(f)$.

Věta

Funkce f definovaná v okolí a je v a spojitá
iff $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

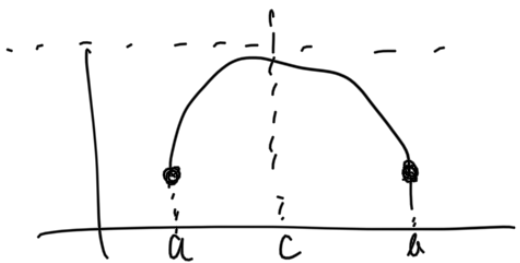
Po částech spojité funkce = v každém omezeném intervalu jen konečně mnoho bodů nespojitosti, v nich konečné jednostranné limity.

VLASTNOSTI SPOJITÝCH FUNKCÍ

Rolle

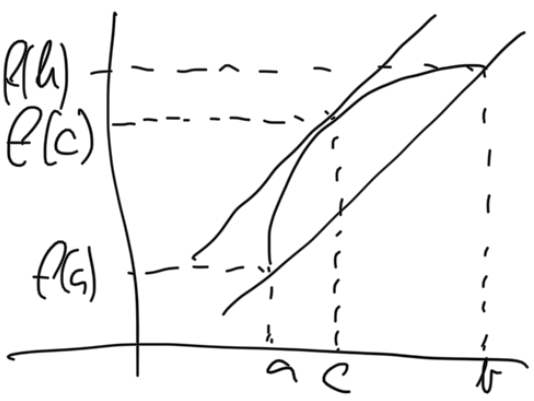
Nechť pro f platí:
1) $f(a) = f(b)$
2) je spojitá na $\langle a, b \rangle$
3) má derivaci v každém bodě (a, b)

Pak $f'(c) = 0$ pro některé bod $c \in (a, b)$



Lagrange

Nechť f je spojitá na $\langle a, b \rangle$ a má derivaci v každém bodě (a, b)
Pak exo. $c \in (a, b)$ tak, že
$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$



Cauchy

Nechť f, g jsou spojité na $\langle a, b\rangle$, mají konečné derivace na (a, b) a $g'(x) \neq 0$ na (a, b). Pak ex. $c \in (a, b)$ takové, že

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Weierstrass

Spojitá fce na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ nabývá svého minima a maxima (na intervalu I).
f je na I omezená.

Věta o ohraničené

Je-li f spojitá na intervalu I a nabývá-li v něm hodnot m a M a $m < M$, pak nabývá všech hodnot v intervalu $\langle m, M\rangle$

Derivace a spojitost

Je-li f spojitá a ryze monotonní na I a existuje-li nenulová der. funkce f v $a \in I$, pak:

$$f^{-1}(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$$

Věta

Spojitá fce na uzavřeném intervalu nabývá maxima / minima buď v bodě, ve kterém má lok. max/min, nebo v některém hraničním bodě intervalu.

Věta

Spojitá fce na intervalu má primitivní fci

primitivní fce je spojitá

Stejnoměrná spojitost

Je-li f spojitá na uzavřeném intervalu I, pak pro $\forall \varepsilon : \varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že $|f(y) - f(z)| < \varepsilon$ pro $y, z \in I$ takové, že $|y - z| < \delta$

Věta

Spojitá funkce na uzavřeném intervalu má určitý integrál.

Věta

Spojitá funkce na uzavřeném intervalu nabývá své střední hodnoty.

7. Derivace

Derivace fce f v bodě a je

$$\frac{df}{dx}(a) = f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

tedy $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

jednostranné derivace stejně jako jednostranné limity

Derivace funkce v bodě: $f'(a)$ ... číslo

Derivace funkce: $f' : a \longmapsto f'(a)$ ... funkce

Derivace: $' : f \longmapsto f'$ ... operátor

Vazba derivace na spojitost

Funkce je spojitá v každém bodě, ve kterém má konečnou derivaci.

Derivace součtu, rozdílu, součinu a podílu

$$(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$$

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a) g(a) + f(a) g'(a)$$

$$(f/g)'(a) = \frac{f'(a) g(a) - f(a) g'(a)}{g(a)^2} \qquad g(a) \neq 0$$

Derivace složené fce:

Má-li fce f vlastní derivaci v bodě a, fce g vlastní derivaci v bodě $f(a) = b$, pak fce $h = g \circ f$ má v bodě a vlastní derivaci.

$$h'(a) = g'(b) \cdot f'(a)$$

Derivace je lineární zobrazení

Derivace inverzní fce

Je-li f spojitá a ryze monotonní na I a existuje-li nenulová der. funkce f v $a \in I$ pak

$$f^{-1}{}'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$$

Derivace vyšších řádů

Značíme $f^{(n)}(a)$ a definujeme rekurzivně: $f^0 = a$

$$f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)' \quad n \in \mathbb{N}$$

Základní derivace

$(c)' = 0 \quad x \in \mathbb{R} \ (c \in \mathbb{R} \text{ konst.})$

$(x^a)' = a x^{a-1} \quad a \notin (0,1)$

$(e^{ax})' = a e^{ax}$

$(a^x)' = a^x \ln(a)$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{x^2+1}$

$(\operatorname{arccot} x) = -\frac{1}{x^2+1}$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\sinh x)' = \cosh x$

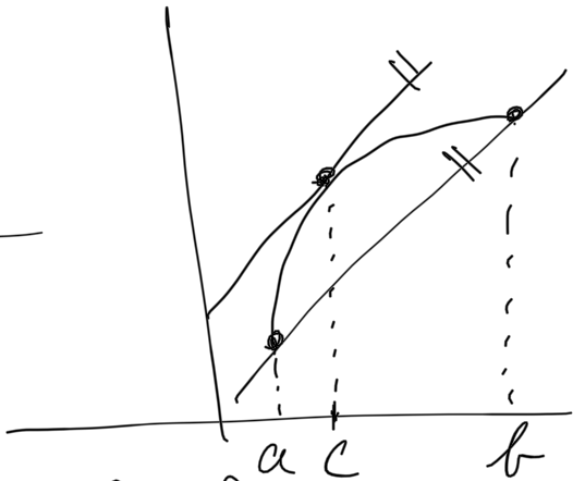
$(\cosh x)' = \sinh x$

(8.) Lagrangeova věta

Nechť f je spojitá na $\langle a,b\rangle$ a má derivaci v každém bodě (a,b). Pak existuje $c \in (a,b)$ tak, že $f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$

$$\Updownarrow$$

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



je-li $f'(c) > 0$ všude na $\langle a,b\rangle$ funkce roste

$f'(c) < 0$ klesá

spec. případ Lagrangeovy věty je Rolleova věta

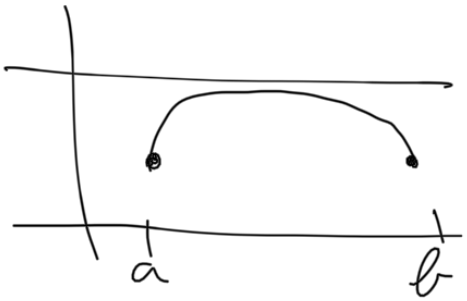
pro f platí

1) $f(a) = f(b)$

2) f spojitá na $\langle a,b\rangle$

3) má der. v každém bodě (a,b)

Pak $f'(c) = 0$ pro $c \in (a,b)$



Důsledek Lagrange

Pro spojitou fci je derivace v limitě rovna limitě derivace.

Je-li f spojitá v bodě a zprava a existuje-li $f'(a+) = \lim_{x \to a^+} f'(x)$ pak

$f'_+(a) = f'(a+)$

Při $f(x) = |x|$ je spojitá pro $x > 0$ je $f(x) = x$

a tedy $f'(x) = 1$ pro $x < 0$ je $f(x) = -x$

a tedy $f'(x) = -1$

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} -1 = -1$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$$

9. Neurčitý integrál

Množinu všech primitivních funkcí k funkci f na intervalu $\mathcal{I}$ nazýváme neurčitý integrál f na $\mathcal{I}$.

$$\int f = \int f(x)\,dx = \{F + c;\ c \in \mathbb{R}\} = F + c$$

Primitivní funkce

Funkce F se nazve primitivní funkce z f na intervalu $\mathcal{I}$, jestliže $F' = f$ na $\mathcal{I}$.

Postačující podmínka existence

Spojitá funkce na intervalu má primitivní fci.

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \qquad \int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\cos ax + C$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C \quad x \neq 0 \qquad \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \operatorname{atan} x + C$$

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax} \qquad \int u \pm v\,dx = \int u\,dx \pm \int v\,dx$$

$$\int \sin ax\,dx = -\frac{1}{a}\sin ax + C$$

Per partes ("po částech")

Na I existují u', v', $\int u'v$ pak

$$\int uv' = uv - \int u'v \quad \text{na } I$$

Substituce

Nechť I, J jsou otevřené intervaly, funkce $\varphi: I \to J$ má derivaci φ' na intervalu I, funkce $f: J \to \mathbb{R}$ má primitivní fci F na intervalu J. Pak platí:

1.) $$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + C, \quad t \in I$$

2.) Je-li fce φ ryze monotonní, $\varphi(I) = J$ a existuje primitivní funkce $G(t)$ k funkci $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ na intervalu I, pak

$$\int f(x)\,dx = G(\varphi^{-1}(x)) + C, \quad x \in J$$

$$\int f(x)\,dx = \left| \begin{matrix} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)\,dt \end{matrix} \right| = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

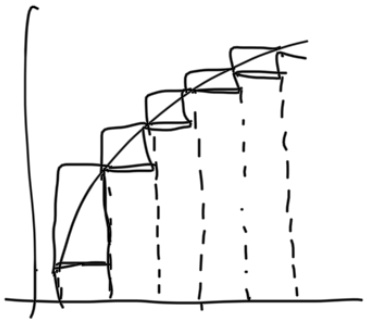
10. Určitý integrál

Dělení intervalu

Dělení intervalu $\langle a,b\rangle$ je konečná množina $D \subset \langle a,b\rangle$ obsahující a,b

Značíme ji $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, kde $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

Dolní a horní integrální součet



Pro omezenou funkci f na $\langle a,b\rangle$ a dělení D intervalu $\langle a,b\rangle$ zavádíme dolní a horní integrální součet:

$$\underline{S}(f,D) = \sum_{i=1}^{n} \inf f(\langle x_{i-1}, x_i\rangle) \cdot (x_i - x_{i-1}),$$

$$\overline{S}(f,D) = \sum_{i=1}^{n} \sup f(\langle x_{i-1}, x_i\rangle)(x_i - x_{i-1})$$

Určitý (Riemannův) integrál

Je-li pro omezenou funkci f na $\langle a,b\rangle$ supremum dolních integrálních součtů rovno infimu horních integrálních součtů, nazveme tuto hodnotu určitý integrál fce f na $\langle a,b\rangle$. Čísla a,b jsou horní a dolní mez.

značíme $\int_a^b f(x)\,dx$

Nutná podmínka existence

Pro omezenou fci f na $\langle a,b\rangle$ existuje $\int_a^b f$ právě tehdy, když existuje posloupnost $(D_n)_{n=1}^{\infty}$ dělení $\langle a,b\rangle$ taková, že $\lim_{n\to\infty} S(f,D_n) = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f,D_n)$. V takovém případě je integrál roven těmto hodnotám.

Postačující podmínka

Monotonní fce na uzavřeném intervalu má určitý integrál.
Spojitá fce na uzavřeném intervalu má určitý integrál.

$$\int_a^a f = 0 \qquad \int_a^b f = -\int_b^a f$$

Newton – Leibniz

Nechť f je omezená na $\langle a,b\rangle$. $\int_a^b f(x)\,dx$ existuje a F je primitivní funkce k f na (a,b).

Pak:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b-) - F(a+) \left(= \lim_{x\to b-} F(x) - \lim_{x\to a+} F(x)\right)$$

(11) Vazby mezi neurčitým a určitým integrálem

Určitý pomocí neurčitého = Newton–Leibniz

Nechť fce f je omezená na $\langle a, b \rangle$, nechť existuje $\int_a^b f(x)\,dx$ a primitivní fce F k fci f na intervalu (a, b). Pak

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b-) - F(a+)$$

neurčitý $\longrightarrow$ určitý : podle Newton–Leibnize

určitý $\longrightarrow$ neurčitý :

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad , \text{ kde } a \text{ je konstanta}$$

12. Číselná řada

(Nekonečná číselná) řada je výraz $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k$,

kde $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ je posloupnost reál. čísla a_k je

k-tý člen, $\sum_{k=1}^{n} a_k$ je n-tý částečný součet,

limita posloupnosti částečných součtů je součet.

Řada konverguje má-li konečný součet.

diverguje má-li nekonečný

osciluje nemá-li součet

Geometrická řada

Geom. řada s koeficientem q je řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^{k-1}$

Součet geom. řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^{k-1} = \frac{a_1}{1-q} \quad \text{pro } |q| < 1$$

pro $|q| \geq 1$ a $a_1 \neq 0$ řada vždy diverguje

13. Konvergence

Řada konverguje, má-li konečný součet.

Řada konverguje absolutně, pokud konverguje $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$.

Absolutně konvergentní řada konverguje.

Nutná podmínka konvergence

Jestliže $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje pak $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$

Podílové kritérium

nechť $a_k \neq 0$ pro každé $k \in \mathbb{N}$.

1) Je-li $\left|\frac{a_{n+1}}{a_k}\right| \leq q < 1$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje absolutně

2) — (1 — ≥ 1, — (1 —, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nekonverguje

Odmocninné

1) Je-li $\sqrt[k]{|a_k|} \leq q < 1$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje absolutně

2) — 1 — ≥ 1, — (1 — nekonverguje

Limitní tvar (pro odmocninové obdobně)

1) Je-li $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konv. abs.

2) Je-li $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nekonverguje