1

Maximum je největší prvek množiny $M$

Minimum je nejmenší prvek množiny $M$

Supremum je nejmenší horní závora $M$

Infimum je největší dolní závora $M$

Horní závora – $\forall x \in M: x \leq z$

Dolní závora – $\forall x \in M: z \leq x$

shora omezená – má horní závoru $\in \mathbb{R}$

zdola omezená – má dolní závoru $\in \mathbb{R}$

omezená – shora i zdola

- $\sup M = +\infty$ iff $M$ není shora omezená (stejně pro ~~minimum~~ infimum)
- iff $\exists$ $\max M \Rightarrow \max M = \sup M$ (stejně pro minimum)

$P_{\bar{r}}$ $M = \mathbb{N}$ : $\max M = X$ $\sup M = +\infty$

$\min M = 1$ $\inf M = 1$

$M = \langle 0; 1 \rangle$ $\max M = 1$ $\sup M = 1$

$\min M = 0$ $\inf M = 0$

$M = (0, 1)$ $\max M = X$ $\sup M = 1$

$\min M = X$ $\inf M = 0$

$M = \emptyset$

$\sup M = -\infty$

$\inf M = +\infty$

$M = \{x \in \mathbb{Q};\ x^2 < 2\}$

$(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ v $\mathbb{R}$

$(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}$

$\sup M = \sqrt{2}$ v $\mathbb{R}$

$\sup M = X$ v $\mathbb{Q}$

## LIMITA

Funkce $f$ def. v prstencovém okolí bodu $a \in \overline{\mathbb{R}}$ má v bodě $a$ limitu $b \in \overline{\mathbb{R}}$ ($\lim_{x \to a} f(x) = b$), jestliže platí: pro každé okolí $U$ bodu $b$ v $\mathbb{R}$ prstencové okolí $P$ bodu $a$ takové, že $f(P) \subset U$.

## OKOLÍ BODU

Okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ o poloměru $r > 0$ je $U(a,r) = \{x \in \mathbb{R} : |x-a| < r\}$

Prstencové okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ o poloměru $r > 0$ je $P(a,r) = U(a,r) \setminus \{a\}$

Okolí bodu $\pm\infty$ jsou: $U(-\infty, r) = P(-\infty, r) = (-\infty, r)$

$U(+\infty, r) = P(+\infty, r) = (r, +\infty)$

## POSLOUPNOST

(nekonečná) posloupnost (reálných čísel) je zobrazení $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

značíme $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $a_n$ je $n$-tý člen.

## LIMITA POSLOUPNOSTI

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má limitu $a \in \overline{\mathbb{R}}$ ($\lim_{n \to \infty} a_n$), pokud pro každé okolí $U$ bodu $a$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n > n_0$ je $a_n \in U$.

## HROMADNÁ HODNOTA

Číslo $a \in \overline{\mathbb{R}}$ je hromadná hodnota posloupnosti, pokud v každém okolí $a$ leží nekonečně mnoho jejích členů. (Každá posloupnost má alespoň 1 hromadnou hodnotu)

Limes superior ($\limsup_{n \to \infty} a_n$) je supremum množiny hromadných hodnot

Limes inferior ($\liminf_{n \to \infty} a_n$) je infimum množiny hromadných hodnot

Limita posloupnosti je její hromadná hodnota. Největší hodnota posloupnosti je limita nikdy její rybení posloupnosti (rybení posloupnost rybem většími než zbytek).

Př. $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$

vybrané posloupnosti $(-1)_{n=1}^{\infty}$ pak hromadná hodnota $-1$

$(1)_{n=1}^{\infty}$ pak hromadná hodnota $1$

$\limsup_{n\to\infty} (-1)^n = 1$ $\quad \liminf_{n\to\infty} (-1)^n = -1$

---

$\left(\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\right)_{n=1}^{\infty}$

$k \in \mathbb{N}$ $n = 3k$ pak $\cos(2k\pi) = 1$ proto $\lim_{k\to\infty} (2k\pi) = 1$ hledej

$1$ je hromadný bod posloupnosti $\left(\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\right)_{n=1}^{\infty}$

$k \in \mathbb{N}$ $n = 3k+1$

$\cos\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right) = -\frac{1}{2}$ ... $\lim_{k\to\infty} \left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right) = -\frac{1}{2}$ hledej

$-\frac{1}{2}$ je hromadný bod

$k \in \mathbb{N}$ $n = 3k+2$

$\cos\left(\frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right) = -\frac{1}{2}$ ✓

$\limsup_{n\to\infty} \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) = 1$ $\quad \liminf_{n\to\infty} \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$

---

- Posloupnost s konečnou limitou je konvergentní
- Konvergentní posloupnost je omezená
- Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má limitu, právě tehdy když má právě hromadnou hodnotu tj. právě tehdy když všechny z ní vybrané posloupnosti mají stejnou limitu tj. právě tehdy když $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n$

Př. $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

(3)

Funkce $f$ je zobrazení $A \to \mathbb{R}$ kde $A \subset \mathbb{R}$ je nebprázdná.

Množina $A$ je definiční obor funkce $f$ ($D(f)$), množina $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$ je obor hodnot funkce $f$ ($R(f)$).

Graf funkce $f$ je $\{[x, f(x)] : x \in D(f)\}$

prostá – pro 1 $x$ právě 1 $y$

na – pro všechna $y$ alespoň 1 $x$

bijekce – prostá a na

## SPOJITOST

Funkce $f$ je spojitá v bodě $a \in D(f)$, pokud ke každému okolí $U$ bodu $f(a)$ existuje okolí $V$ bodu $a$ takové, že $f(V \cap D(f)) \subset U$.

Funkce je spojitá, je-li spojitá v každém bodě. (Funkce $f$ def. v okolí $a$ je v $a$ spojitá právě tehdy, když $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$).

## LIMITY ZÁKLADNÍCH FUNKCÍ

$\lim_{x \to a} f(x) = 0$ právě tehdy když $\lim_{x \to a} |f(x)| = 0$

### Limita součtu, rozdílu a podílu

$$\lim_{n \to \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \to \infty} a_n \pm \lim_{n \to \infty} b_n$$

$$\lim_{n \to \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \to \infty} a_n \cdot \lim_{n \to \infty} b_n$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \to \infty} a_n}{\lim_{n \to \infty} b_n}$$

### Sevření

Je-li $f \le h \le g$ na prstencovém okolí $a \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = b$ pak $\lim_{x \to a} h(x) = b$

"$\frac{1}{0^{\pm}}$"

Je-li $\lim_{x \to a} f(x) > 0$, $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ a $g(x) > 0$ na prstencovém okolí $a \in \overline{\mathbb{R}}$ pak $\lim_{x \to a} f(x)/g(x) = +\infty$

"$0 \cdot m$" $= \left|\frac{a_n}{\pm\infty}\right| = 0$"

Je-li $\lim_{x \to a} f(x) = 0$, $g$ je omezená na prstencovém okolí $a \in \overline{\mathbb{R}}$ pak $\lim_{x \to a} f(x) g(x) = 0$

Je-li $f \leq g$ na prstu okolí $a \in \overline{\mathbb{R}}$,
$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ ($\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$) pak
$\lim_{x\to a} (f+g)(x) = +\infty$ ($\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$)).

"$|\pm\infty \pm \infty| = \pm\infty$"
Je-li $\lim_{x\to a} f(x) = b \in \{\pm\infty\}$ a $g$ je omezená na prstu okolí $a \in \overline{\mathbb{R}}$ pak $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = b$.

"$|\text{reš} \pm c| = \text{reš}$, $|\text{reš} \cdot (c \neq 0)| = \text{reš}$, $|\text{reš}/(\neq 0)| = \text{reš}$"

Jestliže $\lim_{x\to a} f(x)$ neexistuje pak platí:

1) Je-li $\lim_{x\to a} g(x)$ omezená, pak $\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x))$ neexistuje
2) — " — a nenulová, pak neexistuje $\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))$ a $\lim_{x\to a}(f(x)/g(x))$.

## Limita složené funkce

Nechť pro $a, b, c \in \overline{\mathbb{R}}$ platí: 1) $\lim_{x\to a} f(x) = b$
2) $\lim_{y\to b} g(y) = c$
3) $g(b) = c$ nebo $f(x) \neq b$ na prst. okolí $a$.
Pak $\lim_{x\to a}(g(f(x))) = c$.

## SPOJITOST

1) Jsou-li $f, g$ spojité v $a$ pak $f \pm g$, $f \cdot g$, $f/g$ (if def) jsou spojité v $a$
2) Je-li $f$ spojitá v $a$, $g$ v $f(a)$, pak $g \circ f$ je spojitá v $f(a)$.
3) Je-li $f$ spojitá v $a$, pak je ~~not~~ omezená na okolí $a$
4) Je-li $f$ spojitá v $a$, $f(a) > 0$ pak $f(x) > 0$ na okolí $a$.

mocniny: $x^a$ $\begin{cases} a = 2k & \lim_{x\to\infty} = +\infty \quad \lim_{x\to-\infty} = +\infty \\ a = 2k+1 & \lim_{x\to\infty} = +\infty \quad \lim_{x\to-\infty} = -\infty \end{cases}$

exp: $a^x$
$a > 1$ ... $\lim_{x\to\infty} a^x = +\infty$
$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$
$0 < a < 1$ ... $\lim_{x\to\infty} a^x = 0$
$\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$

sin, cos: $\lim_{x\to\infty} \sin x = \text{neex}$.
$\lim_{x\to\infty} \cos x = \text{neex}$.
$\lim_{x\to\infty} \operatorname{tg}(x) = \text{neex}$. $\lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg}(x) = \frac{\pi}{2}$
$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg}(x) = -\frac{\pi}{2}$

(4)

## MONOTONIE

Funkce $f$ je rostoucí (klesající, neklesající, nerostoucí) na množině $A \subset D(f)$, pokud $f(x) < f(y)$ ($f(x) > f(y)$, $f(x) \leq f(y)$, $f(x) \geq f(y)$) pro všechna $x, y \in A$ splňující, že $x < y$. Všechny funkce se nazývají monotónní, rostoucí a klesající jsou ryze monotónní.

## VĚTA O MONOTONII

Je-li $f$ spojitá na intervalu $I$ a má-li v každém vnitřním bodě $I$ derivaci, pak:

1) je-li $f'(x) > 0$ všude $I$, pak $f$ je rostoucí na $I$
2) $f'(x) < 0$ , klesající
3) $f'(x) \geq 0$ , neklesající
4) $f'(x) \leq 0$ , nerostoucí
5) $f'(x) = 0$ , konstantní
6) $f'(x) = g'(x)$ pak se liší o konstantu

$f'(a) < 0$ ... $f$ je klesající v bodě $a$

$f'(a) > 0$ .. rostoucí

$f'(a) = 0$ ... nic se nedozvíš

# EXTRÉMY

Funkce $f$ má v bodě lokální minimum (lokální maximum), jestliže $f(x) \geq f(a)$ ($f(x) \leq f(a)$) na některém prstencovém okolí bodu $a$.

Lok. extrém = lok. min/max
Ostrý = ostrá nerovnost

Má-li funkce v bodě $a$ lok. extrém, pak buď $f'(a) = 0$ ($a$ je stacionární bod) nebo $f'(a)$ neexistuje.

nebo $f'(a) = 0$

1) je-li $f''(a) > 0$ pak $f$ má v $a$ ostré lok. min
2) -"- $f''(a) < 0$ — " — max.

Spojitá funkce na uzavřeném intervalu nabývá maxima/minima buď v bodě, ve kterém má lok. max/min, nebo v některém krajním bodě intervalu.

(5)

## LIMITA

def. viz otázka 2

## JEDNOSTRANNÁ LIMITA

Funkce $f$ def. v levém (pravém) prstencovém okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ má v bodě $a$ limitu zleva (zprava) jestliže platí, že pro každé $U$ okolí bodu $b$ ex. levé (pravé) prstencové okolí $P^{\pm}$, že $f(P^{\pm}) \subset U$.

## VZTAH LIMIT

Pro funkci $f$ definovanou v prstencovém okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ je $\lim_{x \to a} f(x) = b$ právě tehdy, když $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = b$

- Každá funkce má v každém bodě nejvýše jednu limitu zprava (zleva).
- Funkce s konečnou limitou zleva (zprava) v $a \in \mathbb{R}$ je omezená na levém (pravém) prstencovém okolí $a$
- Funkce s vlastní (nevlastní) limitou v levo/pravo $a \in \mathbb{R}$ je na po levém/pravém prstencovém okolí rostoucí (klesající)
- Monotónní funkce na otevřeném intervalu má v jeho krajních bodech příslušné jednostranné limity (sup a inf. funkčních hodnot)
- Funkce $f$ je def. v okolí bodu $a$ je v bodě $a$ spojitá zleva/zprava právě tehdy, když $\lim_{x \to a^{\pm}} f(x) = f(a)$.

6

# SPOJITOST

Funkce $f$ je spojitá v bodě $a \in D(f)$, pokud ke každému okolí $U$ bodu $f(a)$ existuje okolí $V$ bodu $a$ tak, že $f(V \cap D(f)) \subset U$. Funkce je spojitá je-li spojitá v každém bodě.

## věta

Funkce $f$ def. v okolí $a$ je v $a$ spojitá právě tehdy, když $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Po částech spojitá funkce = v různém počtu oblastí spojitá, jinde má konečně mnoho bodů nespojitosti, v nich má různé jednostranné limity.

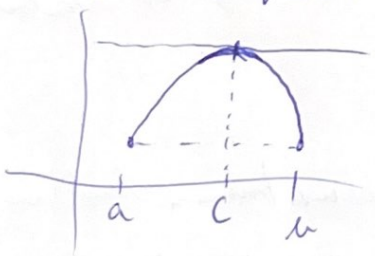
# VLASTNOSTI SPOJITÝCH FUNKCÍ

## Rolleova

nechť pro $f$ platí:

1) $f(a) = f(b)$
2) je spojitá na $\langle a, b \rangle$
3) má der. v každém bodě $(a, b)$

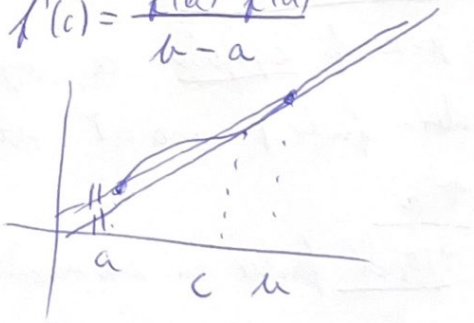
Pak $f'(c) = 0$ pro některý bod $c \in (a, b)$.




## Lagrangeova

nechť $f$ je spojitá na $\langle a, b \rangle$ a má der. v každém bodě $(a, b)$. Pak ex. $c \in (a, b)$ tak, že

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



**Cauchy**

Nechť $f, g$ jsou spojité na $\langle a, b\rangle$, mají postupně derivaci na $(a, b)$ a $g'(x) \neq 0$ na $(a, b)$. Pak $\exists\, c \in (a, b)$ takové, že

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

**Weierstrass**

Spojitá funkce na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ nabývá nejvyšší a nejnižší hodnoty.

**mezihodnota**

Je-li $f$ spojitá na intervalu $I$ a nabývá-li v nějakých bodech $m$ a $M$, $m < M$, pak v $I$ nabývá všech hodnot z intervalu $\langle m, M\rangle$.

**Derivace a spojitost**

Je-li $f$ spojitá a ryze monotónní na $I$ a existuje-li nenulová der. funkce $f$ v $a \in I$, pak: $f^{-1}{}'(b(a)) = \frac{1}{f'(a)}$

**Věta**

Spojitá funkce na uzavřeném intervalu nabývá maxima/minima buď v bodě, ve kterém má lok. max/min, nebo v některém z krajních bodů intervalu.

**Věta**

Spojitá funkce na intervalu má primitivní funkci
pro. primitivní funkce je spojitá

## (5.) Stejnoměrná spojitost

Řekneme, že $f$ je **stejnoměrně spojitá** na intervalu $I$, pokud pro $\forall \varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že $|f(y) - f(z)| < \varepsilon$, pro $y, z \in I$ splňující, že $\forall y, z \in I : |y - z| < \delta$.

**Věta**

Spojitá funkce na uzavřeném intervalu má vždy maximum.

**Věta**

Spojitá funkce na uzavřeném intervalu nabývá své největší hodnoty.

(7)

## Derivace

Derivace funkce $f$ v bodě $a$ je

$$\frac{df}{dx}(a) = f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

nebo: $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

jednostranná derivace stejně jen jednostranná limita

Derivace funkce v bodě: $f'(a)$ ... číslo
Derivace funkce: $f' : a \longmapsto f'(a)$ ... funkce
Derivace: $' : f \longmapsto f'$ ... operátor

## Vztah derivace a spojitost

Funkce je spojitá v každém bodě, ve kterém má konečnou derivaci.

## Derivace $\oplus, \ominus, \odot, \oslash$

$$(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$$
$$(f \cdot g)'(a) = f'(a) g(a) + f(a) g'(a)$$
$$g(a) \neq 0 \longrightarrow \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) g(a) - f(a) g'(a)}{g(a)^2}$$

## Derivace složené fce.

$$(g \circ f)'(a) = g'(h) \cdot f'(a).$$

Derivace je lineární zobrazení.

## Derivace inverzní fce.

Je-li $f$ spojitá a ryze monotónní na $I$ a existuje-li nenulová der. funkce $f$ v $a \in I$ pak

$$f^{-1}{}'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$$

## Derivace vyšších řádů a

značíme $f^{(n)}$ def. rekurentně $f^{(0)} = f$ $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ $n \in \mathbb{N}$

## Tabulka derivací

$(c)' = 0$ $x \in \mathbb{R}$ ($c \in \mathbb{R}$ .const.)

$(x^a)' = a x^{a-1}$ $a \notin (0,1)$

$(e^{ax})' = a e^{ax}$

$(a^x)' = a^x \ln a$

$(\ln)' = \frac{1}{x}$

$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{x^2+1}$

$(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{x^2+1}$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(8)

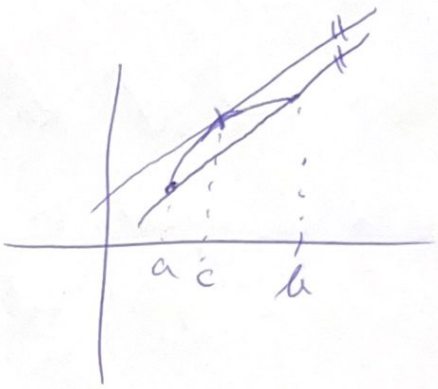
## Lagrangeova věta

Nechť $f$ je spojitá na $\langle a,b\rangle$ a má derivaci v každém bodě $(a,b)$. Pak existuje $c\in(a,b)$ tak, že

$$f(b)-f(a)=f'(c)\cdot(b-a)$$

$$\Downarrow$$

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$




je-li $f'(c)>0$ všude na $\langle a,b\rangle$ funkce roste

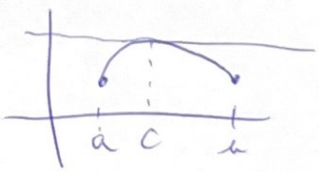
$f'(c)<0$ klesá

spec. případ Lagrange je Rollova věta

pro $f$ platí

1) $f(a)=f(b)$
2) $f$ spojitá na $\langle a,b\rangle$
3) má der. ve vnitřních bodech $(a,b)$

Pak $f'(c)=0$ pro $c\in(a,b)$



## Důsledek Lagrange

Pro spojitou funkci je derivace limitě rovna limitě derivací.

Je-li funkce $f$ spojitá v bodě $a$ a existuje-li $f'(a) = \lim_{x \to a} f(x)$ pak $f'(a) =$

Je-li $f$ spojitá v bodě $a$ zprava a existuje-li $f'(a+) = \lim_{x \to a+} f'(x)$ pak $f'_+(a) = f'(a+)$

Př: $f(x) = |x|$ je spojitá pro $x > 0$ je $f(x) = x$ a tedy $f'(x) = 1$ pro $x < 0$ je $f(x) = -x$ a tedy $f'(x) = -1$

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0-} f'(x) = \lim_{x \to 0-} -1 = -1$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0+} f'(x) = \lim_{x \to 0+} 1 = 1$$

(9)

## Neurčitý integrál

Množina všech primitivních funkcí k funkci $f$ na intervalu $I$ nazýváme neurčitý integrál $f$ na $I$.

$$\int f = \int f(x)\,dx = \{F + c;\ c \in \mathbb{R}\} = F + C$$

## Primitivní funkce

Funkce $F$ se nazývá primitivní funkce k $f$ na intervalu $I$, jestliže $F' = f$ na $I$.

## Postačující podmínka existence

Spojitá funkce na intervalu má primitivní funkci

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C \qquad x \neq 0$$

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C$$

$$\int \sin ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax + C$$

$$\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\sin ax + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + C$$

## Per partes

Na $I$ existují $u', v', \int u'v$ pak

$$\int uv' = uv - \int u'v \text{ na } I$$

## Substituce

nechť $(\alpha, \beta) \xrightarrow{\varphi} (a, b) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $\varphi'$ ex. na $(\alpha, \beta)$, $F(x)$ je primitivní k $f(x)$ na $(a, b)$

1) $\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + c$ na $(\alpha, \beta)$

2) je-li $\varphi: (\alpha, \beta) \xrightarrow{na} (a, b)$ prostá a $G$ je prim. fce k $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ na $(\alpha, \beta)$ pak

$$\int f(x)\,dx = G(\varphi^{-1}(x)) + c \text{ na } (a, b)$$

$$\int f(x)\,dx = \left| \begin{matrix} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)\,dt \end{matrix} \right| = \int G[f(\varphi(t))]\varphi'(t)\,dt$$

(10)

# Určitý integrál

## Dělení intervalu

Dělení intervalu $\langle a, b \rangle$ je konečná množina $D \subset (a, b)$ obsahující $a, b$.

## Dolní a horní integrální součet

Pro omezenou funkci $f$ na $\langle a, b \rangle$ a dělení $D$ intervalu $\langle a, b \rangle$ nazýváme dolní a horní integrální součet:

$$\underline{S}(f, D) = \sum_{i=1}^{n} \inf \{ f(\langle x_{i-1}, x_i \rangle) \} \cdot (x_i - x_{i-1})$$

$$\overline{S}(f, D) = \sum_{i=1}^{n} \sup f(\langle x_{i-1}, x_i \rangle) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

## Určitý (Riemannův) integrál

Je-li pro omezenou funkci $f$ na $\langle a, b \rangle$ supremum dolních integrálních součtů rovno infimu horních integrálních součtů, nazýváme toto společné číslo určitým integrálem funkce $f$ na $\langle a, b \rangle$. Čísla $a, b$ jsou horní a dolní mez.

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

## Nutná podmínka existence

Pro omezenou funkci $f$ na $\langle a,b\rangle$ existuje $\int_a^b f$ právě tehdy, když existuje posloupnost $(D_n)_{n=1}^{\infty}$ dělení $\langle a,b\rangle$ taková, že $\lim_{n\to\infty} \underline{S}(f,D_n) = \lim_{n\to\infty} \bar{S}(f,D_n)$. V takovém případě je integrál roven těmto limitám.

## Postačující podmínka

monotónní funkce na uzavřeném intervalu má určitý integrál.

Spojité funkce na uzavřeném intervalu mají určitý integrál

$$\int_a^a f = 0 \qquad \int_a^b f = -\int_b^a f$$

## Newton – Leibniz

nechť $f$ je omezená na $\langle a,b\rangle$. $\int_a^b f$ existuje a $F$ je primitivní funkce k $f$ na $(a,b)$. Pak

$$\int_a^b f(x)\,dx = \big[F(x)\big]_a^b = F(b-) - F(a+).$$

(11) Vazby mezi neurčitým a určitým integrálem

Určený integrál neurčitého = Newton - Leibniz

Nechť funkce $f$ je omezená na $\langle a, b \rangle$, $\int_a^b f$ existuje a $F$ je primitivní funkce k $f$ na $(a, b)$. Pak

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b-) - F(a+)$$

Určitý $\longrightarrow$ neurčitý nebo
číslo $\longrightarrow$ nikdy $X$

(12)

## Číselná řada

(Nekonečná číselná) řada je výraz $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots$, kde $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost čísel. Číslo $a_n$ je $n$-tý člen, $\sum_{n=1}^{n} a_n$ je $n$-tý částečný součet, limita posloupnosti částečných součtů je součet.

Řada konverguje má-li konečný součet.

| | |
|---|---|
| diverguje | nekonečný |
| osciluje | nemá-li součet |

## Geometrická řada

Geometrická řada s kvocientem $q$ je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1}$

### Součet geom. řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} = \frac{a_1}{1-q} \quad \text{pro } |q| < 1$$

pro $|q| \geq 1$ a $a_1 \neq 0$ řada nekonverguje

(13)

Konvergence

Řada konverguje $\Leftrightarrow$ její součty tvoří posloupnost.

Řada konverguje absolutně, pokud konverguje $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Absolutně konvergentní řada konverguje

Nutná podmínka konvergence

Jestliže $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje pak $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Odmocninové kritérium. (Podílové kritérium je místo $\sqrt[n]{|a_n|}$ limita $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$).

1) $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1$ pro $\forall n \geq n_0$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně
2) $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ pro $\forall n \geq n_0$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nekonverguje

Limitní kritérium

1) Je-li $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně
2) Je-li $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nekonverguje
3) Je-li $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, pak žádné tvrzení neplatí