1.35. Věta (princip vnořených intervalů). *Jestliže pro uzavřené intervaly I_n $(n \in \mathbb{N})$ platí $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$, pak $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$. Jestliže navíc délky intervalů I_n klesají k nule, pak je tento průnik jednobodový.*

Důkaz: Označme $I_n = \langle a_n, b_n \rangle$ pro každé $n \in \mathbb{N}$

Délky I_n klesají k 0, tedy

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \dots \leq b_3 \leq b_2 \leq b_1$$

Množina čísel $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ je shora omezená

každým číslem b_n, existuje v $\mathbb{R}$ tedy supremum, označme ho a. Protože každé b_n je větší než jakékoli a_n, bude jistě $a \leq b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Pak existuje infimum množiny $\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$, označme ho b.

jistě platí $a \leq b$, pak "každé a_n musí než b_n — inf b_n bude nad sup a_n"

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \neq \emptyset$$

"inf a sup se blíží až splynou"

Když délky intervalů klesají k nule, pak $a = b$.

Intervaly musí být uzavřené (aby krajní hodnoty mohly být v průniku), jinak věta neplatí: $I_n = (0, \frac{1}{n})$, $I_n \supset I_{n+1}$

ale $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \emptyset$ (krajní hodnoty žádného intervalu v průniku nejsou)

4.13. Věta (o jednoznačnosti limity). *Každá funkce má v každém bodě nejvýše jednu limitu.*

Nechť f je funkce, vyjetřeme její limitu v bodě $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Pokud limita neexistuje, je chyba u autora.

Předpokládejme, že $\lim_{x \to a} f(x) = b$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$.

Ukážeme, že neexistuje žádné jiné $c \in \overline{\mathbb{R}}$, které by mohlo být limitou. Pro čísla b, c jistě existují okolí U_b, U_c tak, že $U_b \cap U_c = \emptyset$ (jsou disjunktní), "prostě tak malé, že se nepřekrývají".

Protože b je limita, existuje prstencové okolí bodu a, označme ho P_b, takové, že $f(P_b) \subset U_b$.

Pak ale $f(P_b) \cap U_c = \emptyset$, pak ale nemůže pro žádné prstencové okolí P_c bodu a platit $f(P_c) \subset U_c$.

c tedy nemůže být limitou.

"Když body P_b nemůžou být v U_c, znamená to vzdálit se od a, tedy nemůžeme najít žádné okolí a, aby v $f(P_b)$ byly, vždycky nás ten vnitřek omezí"

4.24. Věta (o limitě součtu, rozdílu, součinu a podílu). *Jestliže pro funkce f, g existují limity $\lim_{x\to a} f(x)$ a $\lim_{x\to a} g(x)$ (vlastní nebo nevlastní), pak*

$$\lim_{x\to a}(f \pm g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x),$$
$$\lim_{x\to a}(f \cdot g)(x) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right) \cdot \left(\lim_{x\to a} g(x)\right),$$
$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)},$$

pokud je výraz na pravé straně definován (včetně operací s nevlastními čísly).

Součet: Pokud existují limity f, g v bodě $a \in \overline{\mathbb{R}}$, jsou definovány v nějakém prstencovém okolí bodu a, a obě současně v tom menším z nich. Pak je na tomto okolí definována i funkce $f+g$. Označím $b = \lim_{x\to a} f(x)$ a $c = \lim_{x\to a} g(x)$. Vezmu okolí $U(b+c, \varepsilon)$. "z definice limity, ε lib $\in \mathbb{R}$"

Pak z definice limity plyne existence okolí P_b, P_c bodu a tak, že $f(P_b) \in U(b, \frac{\varepsilon}{2})$ a $g(P_c) \in U(c, \frac{\varepsilon}{2})$. "opět volím $\frac{\varepsilon}{2}$ tak, aby to dobře sedělo s ε zvoleným pro okolí $U(b+c, \varepsilon)$, vychází opět z definice limity"

Pak pro $x \in P_b \cap P_c$ dostáváme:

$$|(f+g)(x) - (b+c)| = |(f(x)-b) + (g(x)-c)| \leq |f(x)-b| + |g(x)-c| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$$

pak ovšem $(f+g)(x) \in U(b+c, \varepsilon)$. "chytrou manipulací ukázat, že součet leží v předem vybraném okolí"

5.9. Věta. *Funkce je spojitá v každém bodě, ve kterém má vlastní derivaci.*

Nechť f má v bodě a vlastní derivaci.
Pak je definována na dutí bodu a a
stačí ukázat, že $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Použijeme větu o součtu a součinu limit:

$$f(x) = f(a) + \frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a) \xrightarrow{x \to a} f(a) + f'(a) \cdot 0 = f(a)$$

chytrá algebra jak vyjádřit $f(x)$

derivace v a existuje a je vlastní, přepíšu limitu a násobím nulou (je definováno)

6.4. Věta (Rolleova). *Nechť pro funkci f definovanou na intervalu $\langle a, b\rangle$ platí*

(1) *f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$,*
(2) *f má derivaci v každém bodě intervalu (a, b),*
(3) *$f(a) = f(b)$.*

Pak existuje bod $c \in (a, b)$ takový, že platí $f'(c) = 0$.

Funkce f je na $\langle a,b\rangle$ spojitá, tedy tam nabývá maxima i minima. Pokud nabývá obou těchto hodnot v vnitřních bodech, je to konstantní funkce a $f'(c)=0 \ \forall c \in (a,b)$. Ukážeme, že pokud funkce nabývá svého minima / maxima v bodě c $c \in (a,b)$, pak $f'(c)=0$. Předpokládejme, že c je maximum funkce f na $\langle a,b\rangle$.

Pro každé $x \in (a,b)$ platí $f(x) \leq f(c)$, tedy $f(x)-f(c) \leq 0$ a

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0 \quad \text{pro } x \in (a,c) \leftarrow \text{"mínus / mínus"}$$

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0 \quad \text{pro } x \in (c,b) \leftarrow \text{"mínus / plus"}$$

"pro minimum by stačilo obrátit následující nerovnosti"

Vyjádřením $f'(c)$ limitou dostáváme:

$$f'(c) = f'_-(c) = \lim_{x \to c-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$$

$$f'(c) = f'_+(c) = \lim_{x \to c+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$$

$\Big\} \Rightarrow f'(c) = 0$

"Funkce je spojitá → má v každém bodě vlastní derivaci → určitě i v c → derivace z každé strany se musejí rovnat → použijeme nerovností a jednostranné derivace"

Tedy $f'(c) = 0$.

Věta. *Je-li f monotonní funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$, pak $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ existuje.*

Důkaz pro rostoucí: Uvažujme dělení $D_n = \{a, a+\frac{b-a}{n}, \dots, b\}$ intervalu $\langle a,b\rangle$ na n stejně dlouhých částí a vyjádřeme rozdíl horního a dolního integrálního součtu na dělení D_n.

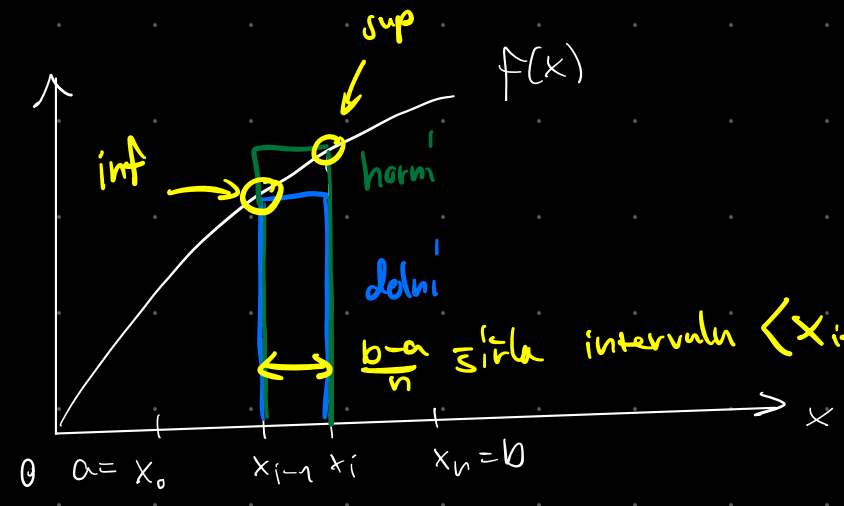
"Cerpáme z +Vrzení, že $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ existuje, pokud $\lim_{n\to\infty} (\underline{S}(f, D_n) - \overline{S}(f, D_n)) = 0$, viz obrázek"

$$\overline{S}(f, D_n) - \underline{S}(f, D_n) = \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) - f(x_{i-1})\right) \cdot (x_i - x_{i-1}) =$$

"tady využíjeme monotonní funkce, inf v $\underline{S}$ bude vždy $f(x_{i-1})$, sup v $\overline{S}$ bude vždy $f(x_i)$"

$$= \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) - f(x_{i-1})\right) = \frac{b-a}{n}\left(f(b) - f(a)\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Tedy $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ existuje.



10.24. Věta (Newtonova–Leibnizova formule). *Nechť f je omezená funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť existuje $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ a primitivní funkce F k funkci f na intervalu (a, b). Pak*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b-) - F(a+) \quad \left(= \lim_{x\to b-} F(x) - \lim_{x\to a+} F(x)\right).$$

(Nedokážeme jsme existenci jednostranných limit $F(b-)$ a $F(a+)$)

Dodefinujme funkci v bodech a, b jejími jednostrannými limitami, uvažujme libovolné dělení $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, $D \in \mathcal{D}$ (množina všech dělení $\langle a, b\rangle$).

Pak podle Lagrangeovy věty pro jednotlivé intervaly $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ existují $c_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$ takové, že

$$F(b-) - F(a+) = \sum_{i=1}^{n} F'(c_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1})$$

„f splňuje podmínky lagrangeovy věty, tedy nějaké bod, ze kterého lze spočítat přírustek funkce"

Dostáváme integrální součet, který je zdola omezen dolním integrálním součtem a shora horním integrálním součtem. „alternativní definice obecného integrálního součtu, bude ležet mezi inf a sup"

Pro každé dělení D intervalu $\langle a, b\rangle$ je

tedy $\underline{S}(f, D) \le F(b-) - F(a+) \le \overline{S}(f, D)$ a tedy

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sup_{D\in\mathcal{D}} \underline{S}(f,D) \le F(b)-F(a) \le \inf_{D\in\mathcal{D}} \overline{S}(f,D) \le \int_a^b f(x)\,dx$$

2.32. Věta. *Každá posloupnost má v $\overline{\mathbb{R}}$ alespoň jednu hromadnou hodnotu (omezená posloupnost vlastní).*

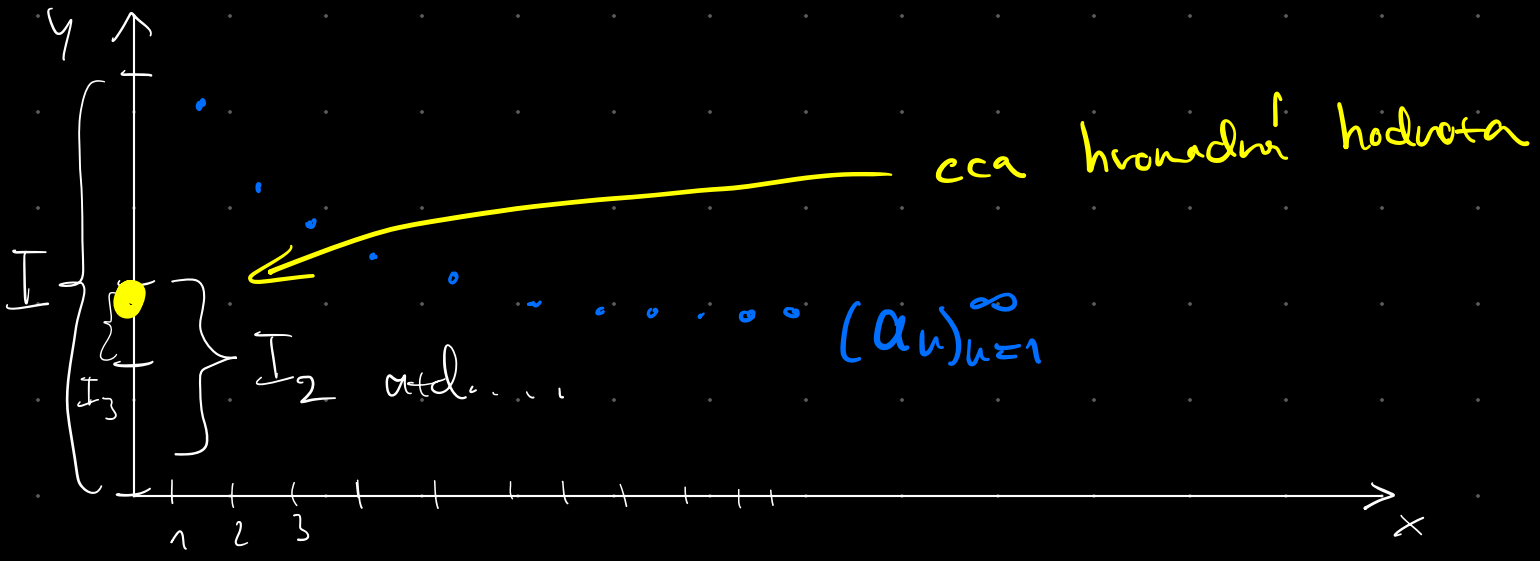
Pokud není posloupnost omezená shora, je hromadnou hodnotou $+\infty$, pokud není omezená zdola, je jí $-\infty$.

Pokud je omezená, hromadnou hodnotu nalezneme následujícím způsobem. Vezmeme uzavřený interval I, který obsahuje všechny členy posloupnosti

"ten určitě existuje, protože posloupnost je omezená"

Rozdělíme ho na poloviny a vybereme ten, který obsahuje nekonečně mnoho členů posloupnosti. "interval na ose y!"

označíme ji I_2 a postup opakujeme. Dostáváme posloupnost vnořených intervalů, podle principu vnořených intervalů je jejich průnik jednoprvkový. Tento prvek je hromadnou hodnotou posloupnosti.



Součet geom. řady: $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} = \frac{a_1}{1-q}$, $|q|<1$

$S_k = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-1}$ / · q I

$qS = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \dots + a_1 q^n$ II

) II − I

$S - Sq = a_1 - a_1 q^n$

$S(1-q) = a_1(1-q^n)$

$S = a_1 \frac{1-q^k}{1-q}$

$\lim_{k\to\infty} S = \lim_{k\to\infty} a_1 \frac{1-q^k}{1-q} \overset{|q|<1}{=} \frac{a_1}{1-q}$

Věta (nutná podmínka konvergence). *Jestliže* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konverguje, pak* $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Pak má konečný součet.

Tedy $\lim_{n\to\infty} S_n = a$, $a \in \mathbb{R}$. Pak určitě platí

$\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = a$, $a \in \mathbb{R}$ a tedy $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n-1}$,

Pak ovšem $\lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) =$

$= 0 = \lim_{n\to\infty} a_n$. "protože $S_n - S_{n-1}$ je rozdíl

n-tých částečných součtů přesně o jeden člen,
odečtením dostaneme právě tento poslední n-tý
člen"

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n \quad \text{I}$$
$$S_{n-1} = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} \quad \text{II} \qquad \text{I}-\text{II}$$

$$S_n - S_{n-1} = a_n$$

Věta (podílové kritérium). *Nechť $a_k \neq 0$ pro každé $k \in \mathbb{N}$.*
1) *Je-li $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q < 1$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje absolutně.*
2) *Je-li $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \geq 1$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nekonv.*

1) Předpokládejme $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, $q = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q$, pak $|a_{n+1}| < q|a_n|$, $q < 1$

$|a_{n+1}| < q|a_n| < q^2|a_{n-1}| \ldots < q^{n-1}|a_1|$

" použijeme $|a_{n+1}| < q|a_n|$ opakovaně – přirozeně předpokládáme "

pak ovšem existuje geometrická řada taková, že

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}|a_1|$ (srovnávací kritérium)

a protože $q < 1$, geometrická řada konverguje,

tedy konverguje i původní řada, dokonce absolutně.

2) Předpokládejme, že $q = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ a $a_1 \neq 0$

$|a_n| \geq |a_{n-1}| \geq |a_{n-2}| \geq \ldots \geq |a_1| \neq 0$

pak ale $\lim_{k \to \infty} a_k \neq 0$ – není splněna nutná podmínka konvergence

Věta (odmocninové kritérium).
1) *Je-li* $\sqrt[k]{|a_k|} \leq q < 1$ *pro každé* $k \in \mathbb{N}$, *pak* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konverguje absolutně.*
2) *Je-li* $\sqrt[k]{|a_k|} \geq 1$ *pro každé* $k \in \mathbb{N}$, *pak* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *nekonv.*

1) Předpokládejme, že $\sqrt[k]{|a_k|} \leq q < 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$
protože $\sqrt[k]{|a_k|} \leq q$, určitě $|a_k| \leq q^k$
$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ je tedy odhadnuta absolutně konvergentním geometrickou řadou, dle srovnávacího kritéria také konverguje, dokonce absolutně.

„geom. řada konverguje $\Leftrightarrow$ konvergující!"

2) Předpokládejme, že $\sqrt[n]{|a_n|} > 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
po umocnění $|a_n| \geq 1$, určitě platí $\lim_{n\to\infty} |a_n| > 0$,
není splněna nutná podmínka konvergence.

Věta (integrální kritérium). *Nechť f je nerostoucí funkce na $\langle k_0, +\infty)$, $f(k) = |a_k|$ pro $k \geq k_0$. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje absolutně právě tehdy, když konverguje $\int_{k_0}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.*

Funkce f je na $\langle k_0, +\infty)$ nerostoucí = monotonní, tedy existuje její určitý integrál.

"odhadem plochu pod grafem f horním a dolním odhadem vyjádřeh bodů, pro interval $\langle k, k+1\rangle$ je to přesně $f(k) = |a_k|$ a $f(k+1) = |a_{k+1}|$. Délka intervalu je přesně 1 (!!!), viz obrázek dole"

Pak platí $\underbrace{1 \cdot f(k)}_{\text{horní odhad}} \geq \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x \geq \underbrace{1 \cdot f(k+1)}_{\text{dolní odhad}}$

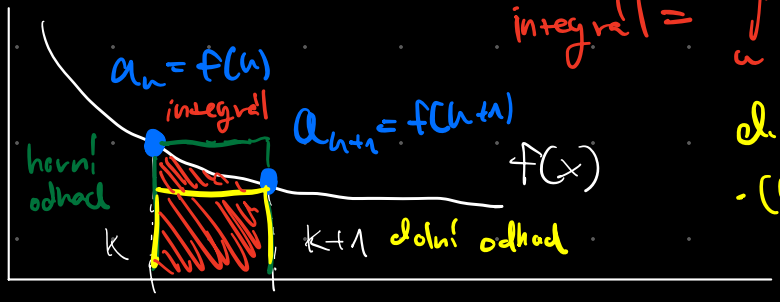
Přechodem k součtu: $\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \geq \int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \geq \sum_{k=1}^{\infty} f(k) - f(1)$

Pokud integrál konverguje, konverguje i suma

Pokud konverguje suma, konverguje integrál

"suma je horní odhad integrálu"

Protože $f(k) = |a_k|$, pak absolutně konverguje i řada.



$h.o. = f(k) \cdot (k+1-k) = f(k) \cdot 1$

integrál $= \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x$

$d.o. = f(k+1) \cdot (k+1-k) = f(k+1) \cdot 1$