1. Max, min, inf, sup

Nechť $M \subset \mathbb{R}$. Číslo $z \in \overline{\mathbb{R}}$ je:

horní závora M, pokud $M \leq z \quad (\forall x \in M: x \leq z)$

dolní závora M, pokud $z \leq M \quad (\forall x \in M: z \leq x)$

M je:

shora omezená, má-li horní závoru

zdola omezená, má-li dolní závoru

omezená, je-li omezená shora i zdola

Maximum M: největší prvek M

Minimum M: nejmenší prvek M

Supremum M: nejmenší horní závora M

Infimum M: největší dolní závora M

Shora **ne**omezená v $\mathbb{R}$: $\sup M = +\infty$

Zdola **ne**omezená v $\mathbb{R}$: $\inf M = -\infty$

Každá neprázdná $M \subset \mathbb{R}$ má sup/inf.

Jestliže existuje $\max M$, pak $\max M = \sup M$

$\max M$ existuje $\Leftrightarrow$ $\sup M \in M$

Příklady:

$(0,1)$ ... max neex., min neex., $\sup = 1$, $\inf = 0$

$\langle 0,1 \rangle$ ... $\max = \sup = 1$, $\min = \inf = 0$

$\mathbb{N}$ ... $\min = \inf = 1$, max neex., $\sup = +\infty$

2. Limita, limes inferior, superior posloupnosti, jejich počty (pro reálnou posloupnost)

Limita (posloupnosti)

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má limitu $a \in \overline{\mathbb{R}}$, pokud pro každé okolí U_a bodu a existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n \in \mathbb{N}: n \geq n_0$ je $a_n \in U_a$

$\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$, $a_n \to a$ pro $n \to \infty$

Limita posloupnosti je vlastní $\rightarrow$ konvergentní posloupnost
nevlastní $\rightarrow$ divergentní posloupnost

Nerostoucí posloupnost: $\lim_{n\to\infty} = \inf\{a_n\}$

Neklesající posloupnost: $\lim_{n\to\infty} = \sup\{a_n\}$

Každá posloupnost má právě jednu limitu, plyne z limity funkce

Konvergentní posloupnost je omezená, plyne z limity funkce

Hromadná hodnota posloupnosti

Bod $a \in \overline{\mathbb{R}}$ nazýváme hromadnou hodnotou posloupnosti, pokud v každém okolí bodu a leží nekonečně mnoho členů této posloupnosti.

$\forall$ posloupnost: hromadný bod $\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$ je hromadnou hodnotou posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, obráceně neplatí: bod a je hrom. hodnotou konstantní posloupnosti, ale není hromadným bodem $\{a_n\} = \{a\}$

Limita posloupnosti je hromadnou hodnotou posloupnosti.

Supremum i infimum hromadných hodnot posloupnosti jsou hromadnými hodnotami této posloupnosti.

Proč? V okolí sup(inf) množiny hromadných hodnot leží hromadná hodnota $\Rightarrow$ nekonečně mnoho členů dané posloupnosti.

Největší hromadná hodnota posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je limes inferior, zn. $\liminf_{n\to\infty} a_n$

Největší hromadná hodnota posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je limes superior, zn. $\limsup_{n\to\infty} a_n$

Příklad: $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$ $\quad \liminf_{n\to\infty} (-1)^n = -1$

$\limsup_{n\to\infty} (-1)^n = 1$

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má limitu právě tehdy, když má jediné hromadné hodnoty, tj. všechny vybrané posloupnosti mají stejnou limitu, tj.

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$$

3. Základní funkce, jejich D, R, spojitost, limity

Reálná funkce je zobrazení

$f: A \longrightarrow \mathbb{R}$, kde $A \subset \mathbb{R}$

Množina A je definiční obor funkce f ($D(f)$)

Množina $R(f) = \{f(x) : x \in A\}$ je obor hodnot funkce f.

Vzor množiny B je $f_{-1}(B) = \{x \in D(f) : f(x) \in B\}$

Graf funkce je množina $\{[x, f(x)] : x \in D(f)\}$

Spojitost: Řekneme, že funkce f je spojitá v bodě $a \in D(f)$, pokud ke každému okolí V bodu $f(a)$ existuje okolí U bodu a tak, že $f(U \cap D(f)) \subset V$.

Funkce je spojitá, když je spojitá v každém bodě svého $D(f)$.

Funkce je spojitá na množině $A \subset D(f)$, když je spojitá funkce $g(x) = f(x)$, $D(g) = A$.

Sevření: Je-li $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = b$ a $f \leq h \leq g$ (funkce) na některém prstencovém okolí a, pak $\lim_{x \to a} h(x) = b$

Mocniny: $f(x) = x^a$

$a \geq 1$: $D(f) = \mathbb{R}$, a liché: $R(f) = \mathbb{R}$, a sudé: $R(f) = \mathbb{R}^+$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ { $-\infty$ a liché; ∞ a sudé

spojité na $\mathbb{R}$

$a \leq -1$: $D(f) = \mathbb{R} / \{0\}$, a liché: $R(f) = \mathbb{R} / \{0\}$

a sudé: $R(f) = (0, \infty)$

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x \to 0+} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to 0-} f(x)$ { $+\infty$ a sudé; $-\infty$ a liché

$a \in (-1, 1)$: TBA

Exponenciální:

a^x, $a \in \mathbb{R}$

$a > 1$, $\neq 0$: $D(f) = \mathbb{R}$, $R(f) = \mathbb{R}^+$,

spojitá na $D(f)$,

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0(+)$

$a \in (0,1)$: $a \dots \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$

~~$D(f) = \mathbb{R}$ ... a lichá, $\mathbb{R}^+$ ... q sudé~~

Inverze:

logaritmus o základu a $\log_a x$

$D(f) = (0, \infty)$, $R(f) = \mathbb{R}$, spojitá na $D(f)$

$(a \neq 1)$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to 0+} f(x) = -\infty$

Goniometrické:

$\sin x$: $D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = \langle -1, 1 \rangle$, spojitá na $\mathbb{R}$, $\lim$ neexistuje

inverze: $\arcsin$: $D(f) = \langle -1, 1 \rangle$

$H(f) = \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$

$\cos x$: $D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = \langle -1, 1 \rangle$, spojitá na $\mathbb{R}$, $\lim$ neexistuje

inverze: $\arccos$: $D(f) = \langle -1, 1 \rangle$

$H(f) = \langle 0, \pi \rangle$

$\operatorname{tg} x$: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

$H(f) = \mathbb{R}$

spojitá na $D(f)$, $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} f(x) = -\infty$

inverze: $\operatorname{arctg} x$, $D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

spojitá na $\mathbb{R}$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}$

4. Monotonie

Funkce f je rostoucí (klesající, neklesající, nerostoucí) na množině $A \subset D(f)$, pokud $f(x) < f(y)$ ($f(x) > f(y)$, $f(x) \leq f(y)$, $f(x) \geq f(y)$) pro všechna $x, y \in A$ taková, že $x < y$. Takové funkce se nazývají monotónní, rostoucí a klesající funkce jsou vyze monotónní.

Rostoucí (klesající) funkce je prostá a má inverzní funkci, která je rovněž rostoucí (klesající)

Věta (o monotonii)

Nechť spojitá funkce f na intervalu I má v každém vnitřním bodě intervalu I derivaci. Je-li $f' \geq 0$ ($f' \leq 0$, $f' < 0$) uvnitř intervalu I, pak funkce

f je na intervalu I rostoucí (nikles.jící, nerostoucí, klesající)

Funkce f je rostoucí (klesající) v bodě a, pokud existuje okolí U bodu a takové, že pro libovolné $x, y \in U$, $x < a < y$, je $f(x) < f(a) < f(y)$

$(f(x) > f(a) > f(y))$

Je-li $f'(a) > 0$, je f v a rostoucí
$(f'(a) < 0)$ (klesající)

$f'(a) = 0$ o monotonii nerozhodne

min/max/inf/sup funkce f na množině M, $M \subset D(f)$ je min/max/inf/sup množiny funkčních hodnot $f(M) = \{f(x) : x \in M\}$

$\max_{x \in M} f(x) = \max f(M)$ $\inf_{x \in M} f(x) = \inf f(M)$

$\min_{x \in M} f(x) = \min f(M)$ $\sup_{x \in M} f(x) = \sup f(M)$

Řekneme, že hodnota $f(a)$ je

ostré lokální minimum f, pokud $f > f(a)$ na P_a
ostré lokální maximum f, pokud $f < f(a)$ na P_a
lokální minimum f, pokud $f \geq f(a)$ na U_a
lokální maximum f, pokud $f \leq f(a)$ na U_a

Ostrý lokální extrém $\simeq$ ostré lokální min/max

Má-li funkce v bodě a lokální extrém, pak $f'(a) = 0$ nebo $f'(a)$ neexistuje
Bod a se nazývá stacionární bod funkce f, pokud $f'(a) = 0$.

Nechť f je definována v okolí bodu a a nechť $f'(a)=0$.

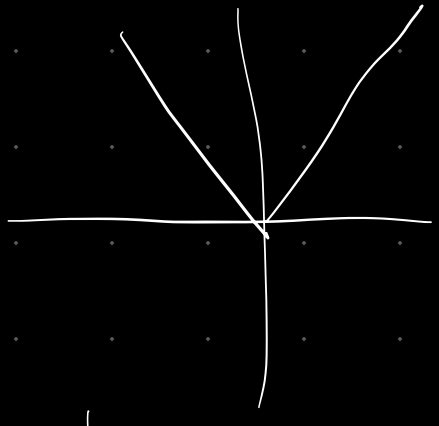
1) $f''(a)>0$, pak $f(a)$ je ostré lokální minimum f

2) $f''(a)<0$, pak $f(a)$ je ostré lokální maximum f

Spojitá funkce na uzavřeném intervalu nabývá maxima (minima) v krajním bodě intervalu nebo v bodě, kde má lokální extrém.

Př.:

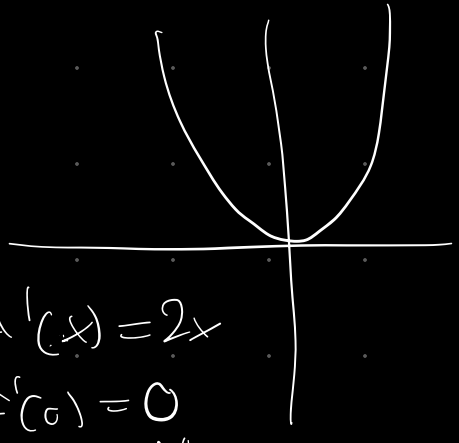
$f(x)=|x|$



$f'(0)$ neex.

0 je ostré lok. (glob.) min

$f(x)=x^2$



$f'(x)=2x$

$f'(0)=0$

$f''(x)=f''(0)=2$

V 0 ostré lokální minimum

5. Limita funkce

Definice (limita):

Řekneme, že funkce f definovaná v prstencovém okolí bodu $a \in \overline{\mathbb{R}}$ má limitu $b \in \overline{\mathbb{R}}$, pokud ke každému okolí U bodu b existuje prstencové okolí P bodu a tak, že $f(P) \subset U$

Značíme: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, $f(x) \xrightarrow{x \to a} b$, $f(x) \to b$ pro $x \to a$

Řekneme, že funkce f definovaná v levém (pravém) prstencovém okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ má v bodě a jednostrannou limitu zleva (zprava) rovnou $b \in \overline{\mathbb{R}}$, pokud ke každému okolí U bodu b existuje levé (pravé) prstencové okolí P bodu a, tak, že $f(P) \subset U$,

značíme

$\lim\limits_{x \to a-} f(x) = b$ $\quad f(a-) = b$

$\lim\limits_{x \to a+} f(x) = b$ $\quad f(a+) = b$

Limita funkce v vlastním bodě existuje právě tehdy, pokud, když v tomto bodě existují jednostranné limity a jsou si rovny (pak se jim rovná i limita funkce)

Každá funkce má v každém bodě nejvýše jednu limitu.

Má-li funkce f v bodě a vlastní limitu, pak je omezená na některém prstencovém okolí bodu a.

<u>Věta</u> (Monotonie limity)

Je-li $\lim_{x \to a} f(x) = b$, $\lim_{x \to a} g(x) = c$ a $f \leq g$ na některém prstencovém okolí bodu a, pak $b \leq c$

<u>Věta</u> (sevření)

Je-li $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = b$ a $f \leq h \leq g$ na některém prstencovém okolí bodu a, pak $\lim_{x \to a} h(x) = b$.

Funkce s vlastní (zdola omezenou) limitou v $a \in \overline{\mathbb{R}}$ je na prstencovém okolí a vlastní (zdola omezená)

Monotonní funkce na otevřeném intervalu má v jeho krajních bodech příslušné jednostranné limity (sup/inf funkčních hodnot)

Platí $\lim_{x \to a} f(x) = 0 \iff \lim_{x \to a} |f(x)| = 0$

6. Spojitost funkce

Spojitost

Řekneme, že funkce f je v bodě $a \in D(f)$ spojitá, pokud ke každému okolí U bodu $f(a)$ existuje okolí V bodu a tak, že $f(V \cap D(f)) \subset U$.

Řekneme, že funkce f je spojitá, pokud je spojitá v každém bodě svého definičního oboru.

Řekneme, že funkce f je spojitá na množině $A \subset D(f)$, jestliže je spojitá funkce $g(x) = f(x)$, $D(g) = A$.

Funkce f definovaná v okolí bodu a je v tomto bodě spojitá právě tehdy, když

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Funkce f definovaná v levém (pravém) okolí bodu a je v tomto bodě spojitá zleva (zprava) právě tehdy, když $\lim_{x \to a-} f(x) = f(a)$

$\left(\lim_{x \to a+} f(x) = f(a)\right)$

Nechť funkce f, g jsou spojité v bodě a pak platí:

1) Funkce $f \pm g$, $f \cdot g$, $|f|$ jsou spojité v a, pokud $g(a) \neq 0$, pak je i f/g spojitá

2) existuje okolí bodu a, na kterém je f omezená

3) je-li $f(a) > 0$, pak $f > 0$ na některém okolí a

je-li f spojitá v bodě a, g spojitá v bodě $f(a)$, pak $g \circ f$ je spojité v a

Vlastnosti spojitých funkcí

Věta (o mezihodnotě)

Je-li funkce f spojitá na intervalu I a nabývá-li v něm hodnot m a M, $m < M$, pak v tomto intervalu nabývá všech hodnot z intervalu $\langle m, M \rangle$

Spojitá funkce je na intervalu prostě právě tehdy, když je ryze monotónní. Inverzní funkce je pak spojitá.

Věta (Rolle):

Nechť pro funkci f definovanou na intervalu $\langle a, b \rangle$ platí:

1) f je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$
2) f má derivaci v každém bodě intervalu (a, b)
3) $f(a) = f(b)$

pak existuje bod $c \in (a, b)$ takový, že $f'(c) = 0$

Věta (Lagrange - o přírůstku funkce)

Nechť f je spojitá funkce na intervalu $\langle a,b\rangle$ a má derivaci v každém bodě intervalu (a,b).
Pak existuje bod $c \in (a,b)$ takový, že platí

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

Věta (Cauchy)

Nechť f, g jsou spojité funkce na intervalu $\langle a,b\rangle$, mají vlastní derivaci na intervalu (a,b) a $g' \neq 0$ v intervalu (a,b). Pak existuje bod $c \in (a,b)$ takový, že platí

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Věta (Weierstrass)

Spojitá funkce na uzavřeném intervalu nabývá nejmenší a největší hodnoty.

Spojitá funkce na intervalu má primitivní funkci.

Je-li f spojitá funkce na intervalu $\langle a, b \rangle$, pak $\int_a^b f(x)\,dx$ existuje.

Spojitá funkce na uzavřeném intervalu nabývá své střední hodnoty

7. Derivace

Derivace funkce f v bodě a je

$$\frac{dF}{dx}(a) = f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Při uvažování jednostranných limit stačí, aby byla funkce f definována na příslušném jednostranném okolí bodu a, v takovém případě mluvíme o jednostranné derivaci zleva nebo zprava.

$$f'_-(a) = \lim_{h \to 0-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \quad f'_+(a) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Pro $x = a+h$: $f'(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

Derivace v bodě $f'(a)$ je číslo (vlastní / nevlastní)

Derivace funkce je funkce: $x \longmapsto f'(x)$

Derivace je operátor $\frac{d}{dx}$: $f \longmapsto f'$

Funkce je spojitá v určitém bodě, má-li v něm vlastní derivaci.

<u>Věta</u> (operace s derivacemi)

Jsou-li f, g funkce, které mají vlastní derivaci v bodě a, platí:

$(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$

$(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$

pokud $g(a) \neq 0$, pak $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$

Věta (derivace složené funkce)

Má-li funkce f vlastní derivaci v bodě a, funkce g vlastní derivaci v bodě $f(a)=b$, pak funkce $h=g\circ f$ má v bodě a vlastní derivaci

$$h'(a)=g'(b)\cdot f'(a)$$

Věta (derivace inverzní funkce)

Je-li funkce f spojitá a ryze rostoucí na otevřeném intervalu I a existuje-li vlastní derivace funkce f v bodě $a\in I$, pak existuje derivace inverzní funkce f_{-1} v bodě $b=f(a)$ a platí

$$(f_{-1})'(b)=\frac{1}{f'(a)}$$

Derivaci řádu n funkce f značíme $f^{(n)}$

a definujeme rekurentně

$$f^{(0)} = f$$
$$f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)' \quad n \in \mathbb{N}$$

Derivace je lineární zobrazení

$(c)' = 0 \quad x \in \mathbb{R}$

$(x^a)' = a x^{a-1} \quad x \in D(f)$ pro $a \notin (0,1)$, $x \in D(f) \setminus \{0\}$ pro $a \in (0,1)$

$(a^x)' = \ln(a) a^x$ (přepíšu na exp)

$(e^x)' = e^x \quad x \in \mathbb{R}$

$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad x \in (0, \infty)$

$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad x \in (0, \infty)$

$(\sin x)' = \cos x \quad x \in \mathbb{R}$

$(\cos x)' = -\sin x \quad x \in \mathbb{R}$

$(\operatorname{tg})' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$(\operatorname{cotg})' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

$(\operatorname{arctg})' = \frac{1}{x^2+1}$

$(\operatorname{arccotg})' = -\frac{1}{x^2+1}$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

8. Lagrangeova věta

Věta (Lagrange - o přírůstku funkce)

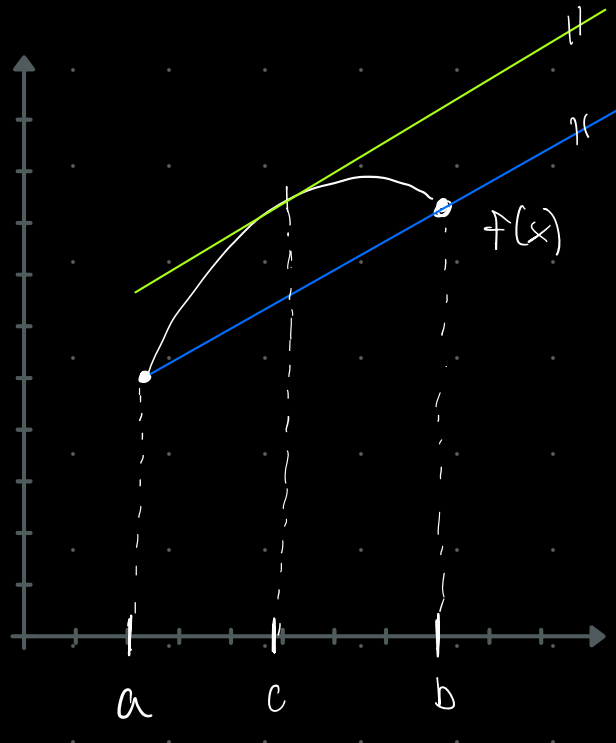
Nechť f je spojitá funkce na intervalu $\langle a,b\rangle$ a má derivaci v každém bodě intervalu (a,b).

Pak existuje bod $c \in (a,b)$ takový, že platí:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

tj.

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



Je-li $f'(c) > 0$ nikde na intervalu $\langle a,b\rangle$, je funkce rostoucí, $f'(c) < 0$ je klesající

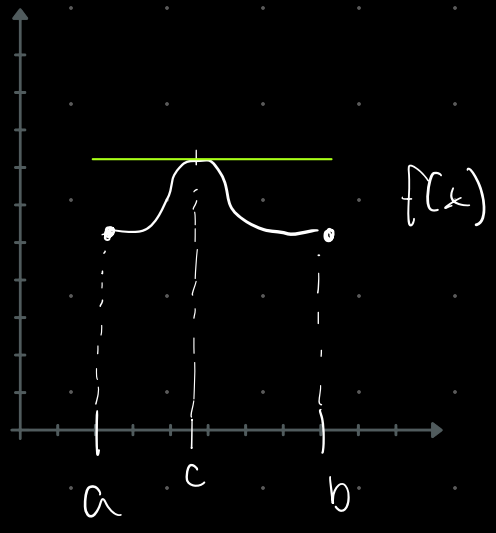
Speciální případ: Rolle

Věta (Rolle)

Nechť pro funkci f definovanou na intervalu $\langle a,b \rangle$ platí:

1) f je spojitá na intervalu $\langle a,b \rangle$
2) f má derivaci v každém bodě intervalu (a,b)
3) $f(a) = f(b)$

pak existuje bod $c \in (a,b)$ takový, že $f'(c) = 0$



Důsledek Lagrange: Pro spojitou funkci je derivace v limitě rovna limitě derivace

Je-li f spojitá v bodě a zprava a existuje-li $\lim_{x \to a+} f'(x)$, pak $f'(a+) = f'_+(a)$

↑ podobně pro derivaci zleva a doboustranně

Příklad: $f(x) = |x|$, $x > 0$: $f(x) = x$, $f'(x) = 1$

$x < 0$: $f(x) = -x$, $f'(x) = -1$

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0-} f'(x) = \lim_{x \to 0-} -1 = -1$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0+} f'(x) = \lim_{x \to 0+} 1 = 1$$

9. Neurčitý integrál

Primitivní funkce:

Funkce F se nazývá primitivní funkce k funkci f na otevřeném intervalu I, pokud $F' = f$ na intervalu I

Spojitá funkce na intervalu má primitivní funkci

F primitivní k f, $C \in \mathbb{R}$, pak i $F(x)+C$ je primitivní k f (konstanta se derivací ztratí)

F_1, F_2 primitivní k f na intervalu I, $F_1 - F_2$ je konstantní funkce (víš se o konstantu, $F_1' - F_2' = 0$)

Nechť f je derivací F na intervalu I, $a, b \in I$, $f(a) < d < f(b)$, pak existuje bod c mezi a a b tak, že $f(c) = d$ (existence mezihodnoty)

Př. $\operatorname{sign} x$ nemá mezihodnotu $\Rightarrow$ nemá prim. funkci

Neurčitý integrál

Pokud existuje alespoň 1 primitivní funkce F k funkci f na intervalu I, nazýváme množinu všech primitivních funkcí k funkci f neurčitým integrálem funkce f na int. I

značíme $$\int f(x)\,dx = \{F + c : c \in \mathbb{R}\}$$

příp. $$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Integrál je lineární (z linearity derivace)

Postačující podmínka: Ke každé spojité funkci existuje neurčitý integrál

Nutná: existence primitivní funkce ??

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \operatorname{arctg} x + C$$

10. Určitý integrál

Dělení intervalu $\langle a,b\rangle$ je konečná množina $D \subset \langle a,b\rangle$ obsahující body a,b. Značíme ji:

$D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, kde $a = x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_n = b$

Nechť f je omezená funkce na intervalu $\langle a,b\rangle$, $D = \{x_0, \dots, x_n\}$ je dělení intervalu $\langle a,b\rangle$.

Dolní a horní integrální součet funkce f pro dělení D jsou:

$$\underline{S}(f,D) = \sum_{i=1}^{n} \inf f(\langle x_{i-1}; x_i\rangle) \cdot (x_i - x_{i-1}) \quad \text{(dolní)}$$

$$\overline{S}(f,D) = \sum_{i=1}^{n} \sup f(\langle x_{i-1}; x_i\rangle) \cdot (x_i - x_{i-1}) \quad \text{(horní)}$$

Je to odhad obsahu plochy pod grafem

inf je vždy $\leq$ sup (u neprázdné množiny), pak

$$\underline{S}(f,D) \leq \overline{S}(f,D)$$

Přidáním bodu x k dělení D takového, že $x \in (x_{i-1}, x_i)$, dělení zjemníme a interval $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ rozdělíme na intervaly $\langle x_{i-1}, x \rangle$ a $\langle x, x_i \rangle$. Na nich může být inf větší (ne menší) a sup menší (ne větší), tedy

$$\underline{S}(f, D) \leq \underline{S}(f, D \cup \{x\}) \leq \overline{S}(f, D \cup \{x\}) \leq \overline{S}(f, D)$$

Definice (Riemannův / Určitý integrál)

Nechť f je omezená funkce na intervalu $\langle a, b \rangle$, $\mathcal{D}$ je množina všech dělení intervalu $\langle a, b \rangle$. Pokud

$$\sup \{ \underline{S}(f, D) : D \in \mathcal{D} \} = \inf \{ \overline{S}(f, D) : D \in \mathcal{D} \},$$

nazýváme tuto hodnotu určitým (Riemannovým) integrálem funkce f na intervalu $\langle a, b \rangle$, značíme ji

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \left(\int_a^b f \right)$$

a, b ... dolní, horní mez

f ... integrand

Integrál pomocí limit:

Nechť f je omezená na intervalu $\langle a,b\rangle$.
Určitý integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ existuje právě tehdy,
když existuje posloupnost $(D_n)_{n=1}^{\infty}$ dělení
intervalu takové, že

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}(f,D_n) = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f,D_n)$$

Je-li f monotonní funkce na intervalu $\langle a,b\rangle$,
pak $\int_a^b f(x)\,dx$ existuje

Je-li f spojitá funkce na intervalu $\langle a,b\rangle$,
pak $\int_a^b f(x)\,dx$ existuje. (postačující podmínky)

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0, \quad \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx, \quad \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

11. Vazby mezi určitým a neurčitým integrálem

Nechť f je omezená funkce na intervalu $\langle a,b\rangle$, $\int_a^b f(x)\,dx$ existuje, $c \in \langle a,b\rangle$. Pak pro funkci $F(x) = \int_c^x f(t)\,dt$, $x \in \langle a,b\rangle$ platí:

1) F je spojitá

2) Je-li f spojitá v x, pak $F'(x) = f(x)$

→ spojitá funkce má na intervalu primitivní funkci

Věta – Newton-Leibnizova formule

Nechť f je omezená funkce na intervalu $\langle a,b\rangle$ a nechť existuje $a\int^b f(x)\,dx$ a primitivní funkce F k funkci f na intervalu (a,b). Pak

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b-) - F(a+) =$$

$$= \lim_{x\to b-} F(x) - \lim_{x\to a+} F(x)$$

Říká, že existuje Riemannův i Newtonův integrál zároveň. Riemannův je ale definován i pro různě nespojité funkce. $\operatorname{sign} x$ nemá primitivní funkci, tedy $(N)-\int_{-1}^{1} \operatorname{sign} x$ není def., ale $(R)-\int_{-1}^{1} \operatorname{sign} x = 0$

12. Číselná řada

Nekonečná číselná řada je výraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$ kde $(a_n)_{n=1}^{\infty}$

je posloupnost čísel. Číslo a_n je n-tý člen, $\sum_{n=1}^{n} = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ je n-tý/ částečný součet (s_n). Limita částečných součtů je součet. Řekneme, že konverguje, má-li konečný součet. Diverguje, nemá-li nekonečný/ součet. Osciluje není-li součet.

Geometrická řada s kvocientem q je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots$

Součet geometrické řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} = \frac{a_1}{1-q} \quad \text{pro } |q|<1, \text{ pro } |q|\geq 1$$

a $a_1 \neq 0$ řada nekonverguje.

Geometrická řada konverguje právě tehdy, když konverguje absolutně

13. Konvergence, absolutní konvergence řady

Řada konverguje, má-li konečný součet.

Konverguje absolutně, pokud konverguje $\sum_{k=1}^{\infty} |a_n|$

Absolutně konvergentní řada konverguje.

Nutná podmínka konvergence

jestliže $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně, pokud konverguje

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

Pro řadu, která konverguje, ale ne absolutně, je součet kladných i záporných členů nekonečný. Vhodným přerovnáním můžeme dostat libovolný součet.

U kritérií stačí, aby byly nerovnosti splněny pro dostatečně velká n, tedy od nějakého n_0.

Podílové kritérium

Nechť $a_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Je-li $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně.

Je-li $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, pak nekonverguje

Limitní tvar:

Je-li $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$, řada konverguje absolutně

Je-li $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1$, řada nekonverguje

Odmocninové kritérium

1) Je-li $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, řada konverguje absolutně

2) Je-li $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, řada nekonverguje

Limitní tvar

Je-li $\lim_{k\to\infty} \sqrt[n]{|a_k|} < 1$, řada konverguje absolutně

Je-li $\lim_{k\to\infty} \sqrt[n]{|a_k|} > 1$, řada nekonverguje

Pozn.: limitní $\lim = 1 \longrightarrow$ nerozhodlo

stačí $\limsup < 1$ / $\liminf > 1$