Důkazy ke zkoušce MA1

$\mathcal{W}$

27. května 2022

Věta 0.1 (Princip vnořených intervalů)
Jsou-li I_n pro $n \in \mathbb{N}$ uzvřené intervaly a platí $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots \supset I_n$, pak $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \varnothing$. Jestliže jdou navíc délky intervalů k 0, pak je tento průnik jednobodový.

Důkaz
Označme $I_n = \langle a_n, b_n\rangle$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.
Z předpokladů vyplývá $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq b_2 \leq b_1$.
Množina $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ je neprázdná a shora omezená $b_n, \forall n \in \mathbb{N}$, její supremum označme a.
Množina $\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ je neprázdná a zdola omezená $a_n, \forall n \in \mathbb{N}$, její infimum označme b.
Platí $a \leq b$, proto $\bigcap I_n = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \neq \varnothing$.
Pokud navíc délky intervalů I_n klesají k 0, pak $a = b$.

Věta 0.2
Pokud je $f' > 0$ v každém vnitřním bodě intervalu I, pak je funkce rostoucí na intevalu I.
Pokud je $f' < 0$ v každém vnitřním bodě intevalu I, pak je funkce klesající na intevalu I.

Důkaz
Nechť f je funkce, uvařujme $f' > 0$ na intevalu I. (Pro $f'(c) < 0$ důkaz obdobný.)
Chceme dokázat, že funkce je rostoucí, tj. $\forall a, b \in I, a < b$ platí $f(a) < f(b)$.
Funkce f splňuje na $\langle a, b\rangle$ podmínky pro Lagrangeovu větu, proto $\exists c \in \langle a, b\rangle$ takové, že $f'(c)(b - a) = f(b) - f(a)$.
Protože $f'(c) > 0$ a $b - a > 0$, musí být i $f(b) - f(a) > 0$. Proto je f rostoucí.

Věta 0.3 (O jednoznačnosti)
Každá funkce má v každém bodě nanejvýš jednu limitu.

Důkaz
Mějme funkci f, uvažujme limitu v bodě a. Může nastat:
1. *f v a limitu nemá $\rightarrow$ věta platí.*
2. *f má v a limitu $L \in \overline{\mathbb{R}}$.*
   Předpokládejme, že f má v a také limitu M.
   Pak existují disjunktní okolí těchto limit U_L a U_M a z definice limity existuje P prstencové okolí bodu a takové, že $f(P) \subset U_L$.
   Potom ale $f(P) \cap U_M = \varnothing$ a M nemůže být limitou f v a.
   $\rightarrow$ nastává spor, věta platí.

Věta 0.4 (Limita součtu)
Limita součtu (rozdílu, součinu a podílu) funkcí je rovna součtu (rozdílu, součinu a podílu) limit jednotlivých funkcí, pokud jsou definovány.

Důkaz
Nechť L a M jsou limity funkcí f a g v bodě a, U_L je $\frac{\varepsilon}{2}$-okolí bodu L, U_M je $\frac{\varepsilon}{2}$-okolí bodu M a U je ε-okolí bodu $L + M$.
Z definice limity existují prstencová okolí P_f a P_g taková, že $f(P_f) \subset U_L$ a $g(P_g) \subset U_M$.
Pro $P := P_f \cap P_g$ dostáváme $|(f + g)(P) - (L + M)| = |(f(P) - L) + (g(P) - M)| \leq |(f(P) - L)| + |(g(P) - M)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Věta 0.5 (Limita složené funkce)
Nechť pro $a, b, A, B \in \overline{\mathbb{R}}$ platí:
1. $\lim_{x\to a} f(x) = A$
2. $\lim_{x\to A} g(x) = B$
3. *$g(x) = B$ nebo $f(x) \neq A$ na nějakém prstencovém okolí bodu a*

Pak $\lim_{x\to a}(g \circ f)(x) = B$

Důkaz

Nechť $\lim_{x\to a} f(x) = A$ *a* $\lim_{x\to A} g(x) = B$.

Z definice limity ke každému okolí U_B *bodu* B *existuje prstencové okolí* P_B *bodu* A *takové, že* $g(P_B) \subset U_B$. *A ke každému okolí* $U_A = P_B \cup A$ *bodu* A *existuje prstencové okolí* P_A *bodu* a *takové, že* $f(P_A) \subset U_A$.

Získáváme tedy $P_A \longrightarrow^f U_A = P_B \cup A$ *a zároveň* $P_B \longrightarrow^g U_B$.

1. *Je-li* $g(A) = B$, *pak* $P_A \longrightarrow^f U_A \longrightarrow^g U_B$.
2. *Existuje-li prstencové okolí* P *bodu* a *takové, že* $A \notin f(P)$, *pak* $P \longrightarrow^f U_A \longrightarrow^g U_B$.

Věta 0.6

Funkce je spojitá v každém bodě, ve kterém má vlastní derivaci.

Důkaz

Nechť f *je funkce a* f *má v bodě* a *vlastní derivaci.*

Z definice derivace je f *v okolí* a *definovaná.*

Jestliže je f *spojitá, musí platit* $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Obecně platí: $f(x) = f(a) + \frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a)$.

V limitním tvaru: $\lim_{x\to a} f(a) + \frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a) = f(a) + f'(a)\cdot 0 = f(a)$.

Proto $f(x) = f(a)$ *a proto je* f *spojitá.*

Věta 0.7 (Rolleova)

Nechť pro funkci f *platí:*

1. $f(a) = f(b)$;
2. *je spojitá na intervalu* $\langle a, b\rangle$;
3. *má derivaci v každém bodě intervalu* (a, b).

Pak existuje $c \in (a, b)$ *takové, že* $f(c) = 0$.

Důkaz

Nechť je funkce f *spojitá na intervalu* $\langle a, b\rangle$.

Proto f *na* $\langle a, b\rangle$ *nabývá minima a maxima.*

Předpokládejme, že f *nabývá maxima (pro minimum obdobně) v bodě* $c \in \langle a, b\rangle$.

Pak pro $\forall x \in \langle a, b\rangle$ *platí* $f(x) - f(c) \leq 0$.

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0 \qquad x \in \langle a, c\rangle \qquad\qquad \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0 \qquad x \in \langle c, b\rangle$$

Limitními přechody získáme:

$$\lim_{x\to c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'_-(c) = f'(c) \geq 0 \qquad\qquad \lim_{x\to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f+-'(c) = f'(c) \leq 0$$

Protože $f(c)$ *existuje, musí platit* $f'(c) = 0$.

Věta 0.8

Monotonní funkce na uzavřeném intervalu má určitý integrál.

Důkaz

Důkaz pro nerostoucí funkce. (Pro neklesající obdobně).

Uvažujme dělení $D_n = \left\{a, a + \frac{b-a}{n}, \ldots, b\right\}$ *intervalu* $\langle a, b\rangle$ *na* n *stejně dlouhých částí.*

$$\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) = \sum_{i=1}^{n}((f(x_i) - f(x_{i-1}))\cdot(x_i - xi - 1)) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - f(x_{i-1})) =$$

$$= \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)) \longrightarrow^{n\to\infty} 0$$

Rozdíl horního a dolního interálního součtu jde k 0 a proto integrál existuje.

Věta 0.9 (Newton-Liebnitzova formule)
Nechť je funkce f omezená na $\langle a,b\rangle$, existuje $\int_a^b f$ a F je primitivní funkcí k f na (a,b). Pak platí:

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b^-) - F(a^+)$$

Důkaz
Nechť f a existují limity $\lim_{x\to a^+} F(x)$ a $\lim_{x\to b^-} F(x)$.
Dodefinujme F limitami v krajích bodech.

Pro libovolné dělení $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ platí $F(b^-) - F(a^+) = \sum_{i=1}^{n} (F(x_i) - F(x_{i-1}))$.

Podle Lagrangeovy věty můžeme přepsat jako $F(b^-) - F(a^+) = \sum_{i=1}^{n} (f(c_i)(x_i - x_{i-1}))$ pro nějaká $c_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$, čímž získáváme integrální součet, který je omezen horním a dolním integrálním součtem; platí $\underline{S}(f,D) \le \sum_{i=1}^{n} (f(c_i)(x_i - x_{i-1})) \le \overline{S}(f,D)$.

Protože $\int_a^b f$ existuje, platí (kde $\mathcal{D}$ je množina všech dělení $\langle a,b\rangle$):

$$\int_a^b f = \sup_{D\in\mathcal{D}} \underline{S}(f,D) \le F(b) - F(a) \le \inf_{D\in\mathcal{D}} \overline{S}(f,D) = \int_a^b f$$

Věta 0.10 (Nutná podmínka konvergence)
Jestliže $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje, pak $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Důkaz
Řada konverguje, pokud má součet L, tj. pokud existuje limita částečných součtů L.

$$\lim_{k\to\infty} s_k = \lim_{k\to\infty} s_{k-1}$$

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} s_k - s_{k-1} = \lim_{k\to\infty} s_k - \lim_{k\to\infty} s_{k-1} = 0$$

Věta 0.11 (Podílové kritérium)
Nechť $a_k \neq 0$ pro $\forall k \in \mathbb{N}$. Pokud pro $\forall k \in \mathbb{N}$ platí, že:

1. $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \le q < 1$, *pro nějaké $q \in \mathbb{R}$ pak řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje absolutně;*
2. $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \ge 1$, *pak řada nekonverguje.*

Důkaz

1. *Předpokládejme, že $q := \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$.*

   $$|a_k| \le q|a_{k-1}| \le q^2|a_{k-2}| \le \ldots \le q^{k-1}|a_1|$$

   $$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \le \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1}|a_1|$$

   To je ovšem absolutně konvergující geometrická řada (s kvocientem < 1). Podle srovnávacího kritéria a_k konverguje absolutně.
2. *Předpokládejme, že $q := \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \ge 1$ a $a_1 \neq 0$ (pro $a_1 = 0$ platí triviálně).*

   $$|a_k| \ge |a_{k-1}| \ge |a_{k-2}| \ge \ldots \ge |a_1| \neq 0$$

   Pak ale nemůže $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ (vedlo by ke sporu), nutná podmínka konvergence tedy není splněná, proto řada nekonverguje.

Věta 0.12 (Odmocninové kritérium)
Nechť $a_k \neq 0$ pro $\forall k \in \mathbb{N}$. Pokud pro $\forall k \in \mathbb{N}$ platí, že:

1. *Pokud je $\sqrt{|a_k|} \leq q < 1$ pro $\forall k \in \mathbb{N}$, pak řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje absolutně.*
2. *Pokud je $\sqrt{|a_k|} \geq 1$ pro $\forall k \in \mathbb{N}$, pak řada nekonverguje.*

Důkaz

1. *Předpokládejme, že $\sqrt{|a_k|} \leq q < 1$ pro $\forall k \in \mathbb{N}$.*

   $$|a_k| \leq q^k$$

   $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ je tedy shora odhadnuta absolutně konvergující geometrickou řadou, proto také absolutně konverguje.
2. *Předpokládejme, že $\sqrt{|a_k|} \geq 1$ pro $\forall k \in \mathbb{N}$.*
   Umocněním získáváme $|a_k| \geq 1$.
   Nemůže být tedy spleněna nutná podmínka konvergence, proto řada nekonverguje.

Věta 0.13 (Integrální kritérium)
Nechť f je nerostoucí funkce na $\langle k_0, \infty)$ a $f(k) = |a_k|$ pro každé $k \geq k_0$.
Řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolutně konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_{k_O}^{\infty} f$.

Důkaz
Nechť f je nerostoucí funkce na $\langle k_0, \infty)$ a $f(k) = |a_k|$ pro každé $k \geq k_0$.
Protože f je monotoní na $\langle k_0, \infty)$, existuje $\int_{k_i}^{k_{i+1}} f$ pro každé $i \in \langle k_0, \infty)$.

$$1 \cdot f(k_i) \geq \int_{k_i}^{k_{i+1}} f \geq 1 \cdot f(k_{i+1})$$

$$M_1 := \sum_{k=1}^{\infty} f(k) \geq \int_1^{\infty} f \geq \sum_{k=1}^{\infty} (f(k) - f(1)) =: M_2$$

($\Rightarrow$): Pokud je hodnota M_1 konečná, je konečný i integrál.
($\Leftarrow$): Pokud konverguje integrál, tak konverguje i M_2. Přičtením $f(1)$ získáváme původní řadu, a protože jsme přičetli konečný počet členů, tak i původní řada konverguje.