

Úkol 1

úloha 1.

Pro jaká $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\frac{\overbrace{(x+3)^2(x-1)}^{f(x)}}{\underbrace{x+4}_{g(x)}} \geq 0 \quad ? \quad (*)$$

Pozorování: pro $g(x)=0$ není výraz definován,
 $\forall x \in \mathbb{R} : (x+3)^2 \geq 0$.

Rozhodují znaménka čitatele a jmenovatele.

$x \in \dots$	$(-\infty, -4)$	$\{-4\}$	$(-4, -3)$	$\{-3\}$	$(-3, 1)$	$\{1\}$	$(1, \infty)$
znam. $(x+3)^2(x-1)$	-	-	-	0	-	0	+
znam. $(x+4)$	-	0	+	+	+	+	+

celkový výsledek:

$(*)$ platí, právě když

$$x \in (-\infty, -4) \cup \{-3\} \cup [1, \infty).$$

úloha 2.

$$M := \left\{ \frac{2n+6}{n^2-9} \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 4 \right\}$$

$$\frac{2n+6}{n^2-9} = \frac{2(n+3)}{(n-3)(n+3)} = \frac{2}{n-3} \quad (n \neq 3)$$

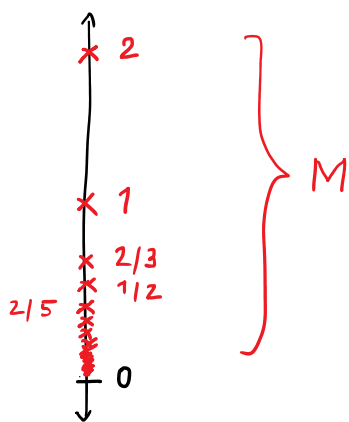
$\Rightarrow$ Každé $x \in M$ má tvar $x = \frac{2}{n-3}$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}, n \geq 4$.

Symbolicky:

$$\forall x \in M \exists n \in \mathbb{N}, n \geq 4 : x = \frac{2}{n-3}$$

(5)

náčrt:



1) $\max M = 2$, protože

(ma1) : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4$:

$$\begin{aligned} \frac{2}{n-3} &\stackrel{?}{\leq} 2 \\ 2 &\leq 2n-6 \\ 4 &\leq n \end{aligned}$$

↩ ✓

$$Z(5): \forall x \in M: x \leq 2 \Rightarrow (ma1)$$

$$(ma2): n_0 = 4 \text{ splňuje } n_0 \in \mathbb{N}, n_0 \geq 4.$$

$$\frac{2}{n_0 - 3} = \frac{2}{1} = 2 \Rightarrow 2 \in M \Rightarrow (ma2)$$

$$2) \sup M = \max M = 2.$$

3) uhadnu, že $\min M$ *neex.*, zdůvodním později.

$$4) \inf M = 0, \text{ protože:}$$

$$(I1): \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4:$$

$$\frac{\overbrace{2}^{>0}}{\underbrace{n-3}_{>0}} > 0 \quad \checkmark$$

zde by stačila
mostra' ner.



$$\text{Tedy k (5) máme: } \forall x \in M: x > 0 \Rightarrow (I1)$$

$$(I2): \text{necht' } s > 0.$$

*mochnu
výše než* *předpokládane' infimum*

Hledám $x \in M$, aby $x < s$, tedy

(viz (5)) $n_0 \in \mathbb{N}, n_0 \geq 4$, aby

$$\frac{2}{n_0 - 3} < s.$$

$$\Leftrightarrow (s > 0)$$

$$\frac{2}{s} < n_0 - 3$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{2}{s} + 3 < n_0 \quad (6)$$

vůlbu

$$n_0 := \left\lfloor \frac{2}{\delta} \right\rfloor + 4 \quad \left(\begin{array}{l} \text{zřejmě } n_0 \in \mathbb{N}, \\ n_0 \geq 4 \end{array} \right)$$

splňuje (6), a tedy také

$$\frac{2}{n_0 - 3} < \delta.$$

$$\text{tedy } x := \frac{2}{n_0 - 3}$$

splňuje $x \in M$ & $x < \delta$.

$\Rightarrow (I2)$

Zpět k bodu 3): Ted už víme, že $0 = \inf M$,
tedy existuje-li $\min M$, musí to být 0.

ale $0 \notin M$, protože

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4 : \frac{2}{n-3} > 0.$$

↑

všichni $x \in M$ mají
tento tvar

Tedy $\min M$ neexistuje.

KOMENTÁŘE

- V Ú1 jde často zapomenout přidat $\{-3\}$.

•



$\min M = \emptyset$ NEPSAT!



$\min M$ neexistuje

minimum je číslo, protože $\emptyset$ je množina.
nemohou se tedy rovnat!

- Množina M není celý interval $(0, 2]$!
- Rovnost

$$\inf \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

neplatí obecně!

(jakou podmínku na $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ musíte přidat?)