

úloha 1

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \lfloor x \rfloor$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{(x-3)^2 - 4}{5}$$

$$A_1 = \mathbb{R}$$

$$A_2 = \{0, 1\}$$

$$B_1 = (1, 2)$$

$$B_2 = \{-2\}$$

víme: pro $x \in \mathbb{R}$ je $\lfloor x \rfloor = \max \{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$.

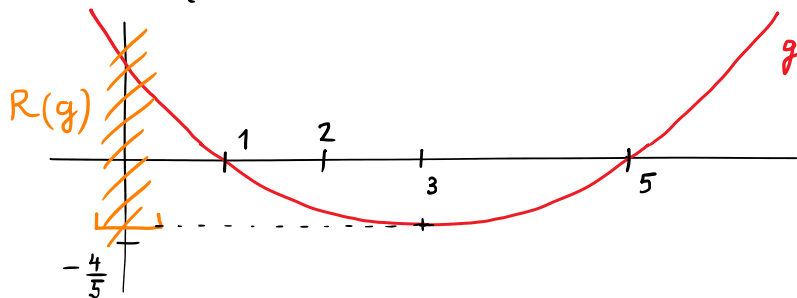
$$f(A_1) = \{\lfloor x \rfloor \mid x \in \mathbb{R}\} = R(f) = \mathbb{Z}$$

$$f(A_2) = \{\lfloor x \rfloor \mid x \in \{0, 1\}\} = \{0, 1\}$$

$$f^{-1}(B_1) = \{x \in \mathbb{R} \mid \lfloor x \rfloor \in (1, 2)\} = \emptyset \quad \Leftarrow R(f) \cap B_1 = \emptyset$$

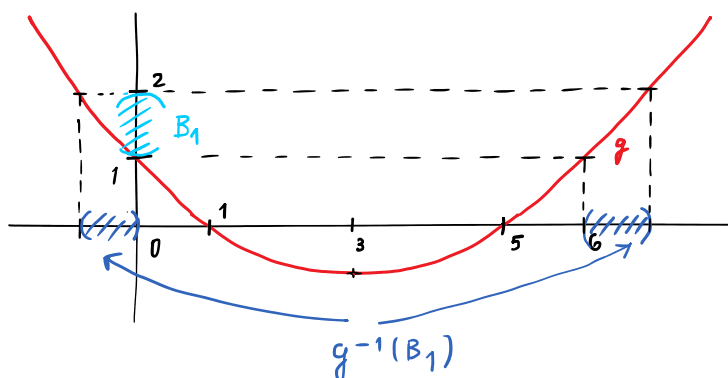
$$f^{-1}(B_2) = \{x \in \mathbb{R} \mid \lfloor x \rfloor = -2\} = [-2, -1)$$

$$g(A_1) = \left\{ \frac{(x-3)^2 - 4}{5} \mid x \in \mathbb{R} \right\} = R(g) = \left[-\frac{4}{5}, \infty\right)$$



$$g(A_2) = \left\{ \frac{(x-3)^2 - 4}{5} \mid x \in \{0, 1\} \right\} = \{0, 1\}$$

$$g^{-1}(B_1) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{(x-3)^2 - 4}{5} \in (1, 2) \right\} = (3 - \sqrt{14}, 0) \cup (6, 3 + \sqrt{14})$$



$$\frac{(x-3)^2 - 4}{5} < 2$$

$$(x-3)^2 < 14$$

$$|x-3| < \sqrt{14}$$

$$x \in (3 - \sqrt{14}, 3 + \sqrt{14})$$

$$\frac{(x-3)^2 - 4}{5} > 1$$

$$(x-3)^2 > 9$$

$$|x-3| > 3$$

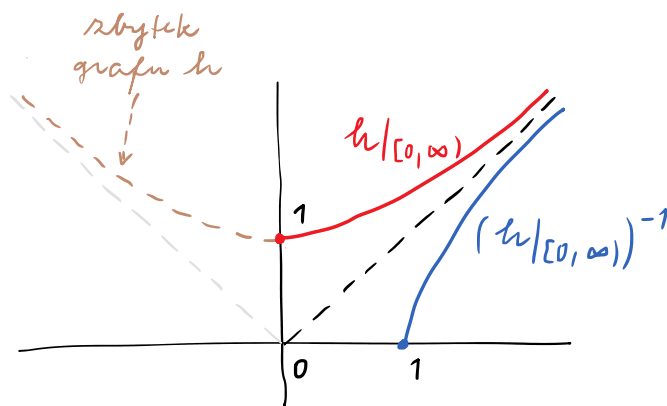
$$x \in (-\infty, 0) \cup (6, \infty)$$

musí platit zároveň

$$g^{-1}(B_2) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{(x-3)^2 - 4}{5} = -2 \right\} = \emptyset \quad \Leftarrow R(g) \cap B_2 = \emptyset$$

Úloha 2

$$h : D(h) \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$$



Označme $h_0 := h|_{[0, \infty)}$.

Vidíme z grafu: h_0 je prosté zobrazení intervalu $[0, \infty)$ na $R(h_0)$
a $R(h_0) = [1, \infty)$.

Hledáme

$$h_0^{-1} : [1, \infty) \rightarrow [0, \infty).$$

Vezmeme rovnici

$$x = h_0(y)$$

$$x = \sqrt{y^2 + 1}$$

$$x^2 = y^2 + 1$$

$$y^2 = x^2 - 1$$

$$|y| = \sqrt{x^2 - 1}$$

$$y = \sqrt{x^2 - 1}$$

(pro $x \in [1, \infty)$)

$$(y \in D(h_0) = [0, \infty), x \in R(h_0) = [1, \infty))$$

možnost $y = -\sqrt{x^2 - 1}$
by nevyhovovala

Výsledek:

$$h_0^{-1} : [1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$$

$$x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$$

Zde můžete napsat pouze $\mathbb{R}$
a pořadí to bude formálně správné.

úloha 3

$$u(x) = x^2 + x - 2$$

$$v(x) = \sqrt{x}$$

$$D(u) = \mathbb{R}, \quad D(v) = [0, \infty)$$

$$(u \circ v)(x) = u(v(x)) = (\sqrt{x})^2 + \sqrt{x} - 2 = x + \sqrt{x} - 2$$

pro $x \geq 0$.

$$(v \circ u)(x) = v(u(x)) = \sqrt{x^2 + x - 2}$$

pro $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + x - 2 \geq 0$

$$x^2 + x - 2 \geq 0$$

$$(x+2)(x-1) \geq 0$$

$$x \in (-\infty, -2] \cup [1, \infty)$$

Výsledek:

$$u \circ v : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x + \sqrt{x} - 2$$

$$v \circ u : (-\infty, -2] \cup [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \sqrt{x^2 + x - 2}$$

KOMENTÁŘ:

Většinou chyby ve značení:

- Označení $f^{-1}(A)$ **neznamená** existenci inverze k funkci f (viz přednášku).
- Tentokrát platilo:



$f^{-1}(B_1)$ **neexistuje**



$f^{-1}(B_1) = \emptyset$

Na rozdíl od minula je totiž $f^{-1}(B_1)$ **nemožná** a existuje vždy – může ale být prázdná.

(Srovnajte s komentářem k minulému úkolu, kde šlo o maximum, což je buď číslo, nebo neexistuje.)

- Musíme rozlišovat mezi funkcemi h a $h|_{[0, \infty)}$.

Inverzi má pouze $h|_{[0, \infty)}$, kdežto h^{-1} neexistuje.

Inverzi k $h|_{[0, \infty)}$ značíme $(h|_{[0, \infty)})^{-1}$, nikoli h^{-1} .

(Funkci lze přejmenovat pro úsporu místa.)

Správně bylo tedy psát $\mathcal{D}((h|_{[0, \infty)})^{-1})$ a podobně.

- Rozlišujte mezi **funkcí** a **funkční hodnotou**.

Nelze psát

$$\underbrace{u \circ v}_{\text{funkce}} = \underbrace{x + \sqrt{x} - 2}_{\text{číslo}},$$

správně je

$$u(v(x)) = x + \sqrt{x} - 2$$

nebo

$$(u \circ v)(x) = x + \sqrt{x} - 2.$$

