Úkol 3

úloha 1

$$\frac{(3n+1)^3\left(\sqrt{n^2+3}-\sqrt{n^2+2}\right)}{\sqrt[3]{8n^6+3n^5-10n+4}}$$

$$=\frac{(3n+1)^3\left(\sqrt{n^2+3}-\sqrt{n^2+2}\right)\left(\sqrt{n^2+3}+\sqrt{n^2+2}\right)}{\sqrt[3]{8n^6+3n^5-10n+4}\left(\sqrt{n^2+3}+\sqrt{n^2+2}\right)}$$

$$=\frac{(3n+1)^3\left(n^2+3-n^2-2\right)}{\sqrt[3]{8n^6+3n^5-10n+4}\left(\sqrt{n^2+3}+\sqrt{n^2+2}\right)}$$

$$=\frac{(3n+1)^3}{\sqrt[3]{8n^6+3n^5-10n+4}\left(\sqrt{n^2+3}+\sqrt{n^2+2}\right)}$$

$$=\frac{\cancel{n^3}\overbrace{\Big(3+\underbrace{\tfrac{1}{n^3}}_{\to 0}\Big)^3}^{\to 3^3=27\ (AL)}}{\cancel{n^2}\cdot\underbrace{\sqrt[3]{8+\underbrace{\tfrac{3}{n}}_{\to 0}-\underbrace{\tfrac{10}{n^5}}_{\to 0}+\underbrace{\tfrac{4}{n^6}}_{\to 0}}}_{\to\sqrt[3]{8}=2\ (AL,\ T\,2.14)}\cdot\cancel{n}\underbrace{\left(\sqrt{1+\underbrace{\tfrac{3}{n^2}}_{\to 0}}+\sqrt{1+\underbrace{\tfrac{2}{n^2}}_{\to 0}}\right)}_{\to 2\ (AL,\ T\,2.14)}}\xrightarrow[AL]{n\to\infty}\frac{27}{4}$$

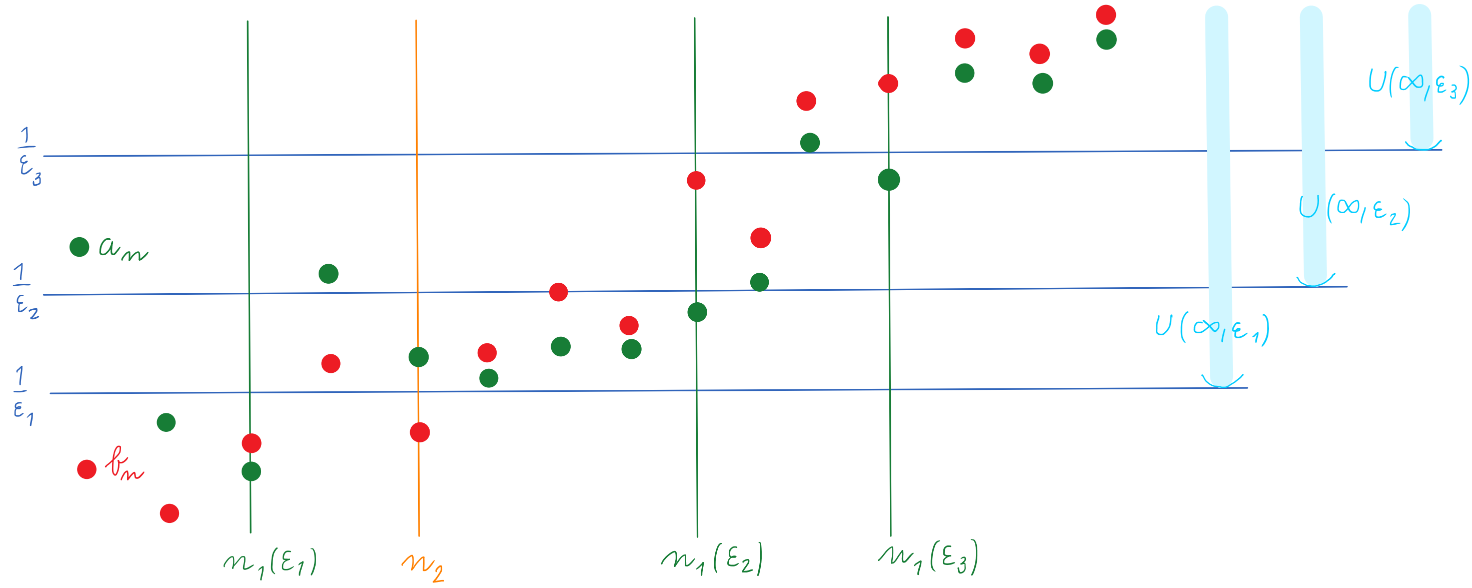
Úloha 2.

z def. limity $\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty\right)$:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_1 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n > n_1 :\ a_n \in U(\infty, \varepsilon) = \left(\tfrac{1}{\varepsilon}, \infty\right) \qquad (5)$$

z předpokladu (4):

$$\exists n_2 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n > n_2 :\ a_n \leq b_n \qquad (6)$$



Poslední index, kde $a_n \notin U(\infty, \varepsilon_1)$. (vpravo od něj už vždy $a_n \in U(\infty, \varepsilon_1)$.)

Poslední index, kde $a_n > b_n$. (vpravo od něj už vždy je $a_n \leq b_n$.)

Chceme dokázat (použijeme definici $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$):

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 :\ b_n \in U(\infty, \varepsilon). \qquad (7)$$

Nechť tedy $\varepsilon > 0$ je libovolně zvolené.
K němu z (5) dostáváme $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n > n_1 :\ a_n > \tfrac{1}{\varepsilon}.$$

Použitím (6) dále dostaneme:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n > \underbrace{\max\{n_1, n_2\}}_{=:\, n_0} :\ \underbrace{b_n \geq a_n > \tfrac{1}{\varepsilon}}_{\Rightarrow\ b_n \in U(\infty, \varepsilon)}$$

K našemu $\varepsilon>0$ jsme tedy našli $n_0\in\mathbb{N}$ takové, že platí:

$$\forall n\in\mathbb{N},\ n>n_0:\ b_n\in U(\infty,\varepsilon)$$

Jelikož $\varepsilon>0$ bylo na začátku libovolné, dostáváme:

$$\forall \varepsilon>0\ \forall n\in\mathbb{N},\ n>n_0:\ b_n\in U(\infty,\varepsilon),$$

což jsme chtěli (viz (7)). $\square$

Zkrácený zápis části :

(5) & (6)

$$\Downarrow$$

$$\exists n_2\in\mathbb{N}\ \forall \varepsilon>0\ \exists n_1\in\mathbb{N}\ \forall n\in\mathbb{N},\ n>\underbrace{\max\{n_1,n_2\}}_{n_0}:\ b_n\geq a_n>\frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Downarrow$$

$$\forall \varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall n\in\mathbb{N},\ n>n_0:\ b_n\in U(\infty,\varepsilon).$$

úloha 3.

V1 => V2 :

Předpokládáme, že V1 platí.

Nechť $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \infty$ a $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je zdola omezená.

Chceme dokázat: $\lim\limits_{n\to\infty} (c_n + d_n) = \infty$.

Z def. omezenosti zdola $\exists\, d \in \mathbb{R}$ takové, že:

$$\forall n \in \mathbb{N} : d_n \geq d. \tag{8}$$

(Lze vzít i $d := \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} d_n > -\infty$.)

Pro $\forall n \in \mathbb{N}$ definujme

$$a_n := c_n + d, \qquad b_n := c_n + d_n.$$

Pak $\forall n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_n = c_n + d \overset{(8)}{\leq} c_n + d_n = b_n$$

a navíc

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \Big(\overset{\infty \text{ (z předpokladu)}}{\overset{\uparrow}{c_n}} + \underset{d \text{ (konst. posloupnost)}}{\underset{\downarrow}{d}}\Big) \overset{AL}{=} \infty + d = \infty.$$

Tedy jsou splněny předpoklady V1 a ta dává

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty,$$

což jsme chtěli.

V2 => V1 :

Předpokládáme, že V2 platí.

Nechť $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ a dále nechť $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ a dále

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n > n_0 : a_n \leq b_n . \tag{9}$$

Chceme ukázat: $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$.

Pro $\forall n \in \mathbb{N}$ označme:

$$c_n := a_n , \qquad d_n := b_n - a_n .$$

z předpokladu máme:

$$\lim_{n\to\infty} \underset{\overset{\shortparallel}{a_n}}{c_n} = \infty \tag{10}$$

Dále platí:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0 : d_n = b_n - a_n \overset{(9)}{\geqslant} 0 ,$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \leq n_0 : d_n \geqslant \underbrace{\min\{ b_n - a_n \mid 1 \leq n \leq n_0 \}}_{=:\delta}$$

Označ

$$d := \min\{0, \delta_0\} ,$$

pak dostáváme

$$\forall n \in \mathbb{N} : d_n \geqslant d ,$$

tedy $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je zdola omezená.

Odtud a z (10) vidíme, že $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ splňují předpoklady V2. Ta dává:

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{(c_n + d_n)}_{b_n} = \infty ,$$

což jsme chtěli. $\square$

KOMENTÁŘ:

- Ve výrazech, jejichž limitu hledáte, nemůžete jednoduše vyškrtat některou jejich část, i pokud ta konverguje k 0:

$$\frac{n+\frac{1}{n}}{n+\frac{2}{n}} \neq \frac{n}{n}.$$

V tomto případě sice platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+\frac{1}{n}}{n+\frac{2}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n},$$

ale takto to také nepište, často to nemusí fungovat! Uvažte případ:

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \neq \lim_{n\to\infty} (1+0)^n = 1$$

- V důkazech si ujasněte, co je a co není předpoklad a co máte dokázat.

- Nerovnost $a_n \le b_n$ platí až od jistého indexu n_0. Jelikož zde ale zkoumáme limitu, opomenutí tohoto detailu nezpůsobí problém.

- V Ú2 ani Ú3 nelze použít V 2.16 (o jednom policajtovi)! Předpokladem V 2.16 je, že $\lim_{n\to\infty} b_n$ existuje. To ale v těchto úlohách nevíte a dokonce právě to je součástí závěru, který máte dokázat!

V 2.16 říká toto:

$$\underbrace{\left((\forall n \ge n_0 : a_n \le b_n) \;\&\; \text{ex.} \lim_{n\to\infty} a_n \;\&\; \text{ex.} \lim_{n\to\infty} b_n\right)}_{\text{předpoklady}} \Rightarrow \underbrace{\lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} b_n}_{\text{závěr}},$$

nikoli toto:

$$\left(\left(\forall n \geq n_0 : a_n \leq b_n\right) \;\&\; \text{ex.} \lim_{n\to\infty} a_n\right) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n,$$

natož pak tohle:

$$\left(\left(\forall n \geq n_0 : a_n \leq b_n\right) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n.\right.$$

V1 (z tohoto úkolu) ale už tvrdí:

$$\left(\left(\forall n \geq n_0 : a_n \leq b_n\right) \;\&\; \lim_{n\to\infty} a_n = \infty\right) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = \infty,$$

existence $\lim_{n\to\infty} b_n$ tedy není předpoklad, ale součást závěru.

všimněte si, že pokud $\lim_{n\to\infty} a_n = L \in \mathbb{R}$, už to nefunguje:

$$\left(\left(\forall n \geq n_0 : a_n \leq b_n\right) \;\&\; \lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}\right) \not\Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n \text{ existuje}.$$

(můžete najít protipříklad.)