

úloha 1

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x+3-2\sqrt{x+2}} = ?$$

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{x+3-2\sqrt{x+2}} &= \frac{(x+1)(x+3+2\sqrt{x+2})}{(x+3)^2 - 4(x+2)} \\ &= \frac{(x+1)(x+3+2\sqrt{x+2})}{x^2 + 2x + 1} \\ &= \frac{\overbrace{x+3+2\sqrt{x+2}}^{\rightarrow 4}}{\underbrace{x+1}_{\rightarrow 0}} \end{aligned}$$

Použití AL „ $\frac{1}{\pm 0}$ “.

$$(i) \lim_{x \rightarrow -1} \underbrace{(x+3+2\sqrt{x+2})}_{f(x)} = 4$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow -1} \underbrace{(x+1)}_{g(x)} = 0$$

(iii) $g < 0$ na $(-\infty, -1)$ (tento interval obsahuje např. levé posl. okolí $P(-1, 1)$)

lze napsat i jinak, např.:

$$\forall x \in (-\infty, -1) : x+1 < 0$$

(iv) $g > 0$ na $(-1, \infty)$

$$(i) \& (ii) \& (iii) \xrightarrow{AL, \frac{1}{-0}} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x+3-2\sqrt{x+2}} = -\infty$$

$$(i) \& (ii) \& (iv) \xrightarrow{AL_{\frac{1}{0}}''} \lim_{x \rightarrow -1_+} \frac{x+1}{x+3-2\sqrt{x+2}} = \infty$$

jednostranné limity se liší $\Rightarrow$ oboustranná neexistuje.

alternativní zápis:

$$\lim_{x \rightarrow -1-} \underbrace{\frac{1}{x+1}}_{< 1 \text{ na } (-\infty, -1)} \xrightarrow{AL_{\frac{1}{-0}}''} -\infty$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{x+3+2\sqrt{x+2}}{x+1} &\stackrel{AL}{=} \lim_{x \rightarrow -1-} (x+3+2\sqrt{x+2}) \cdot \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{1}{x+1} \\ &= 4 \cdot (-\infty) = -\infty. \end{aligned}$$

Výsledek:

$$\lim_{x \rightarrow -1-} \frac{x+1}{x+3-2\sqrt{x+2}} = -\infty$$

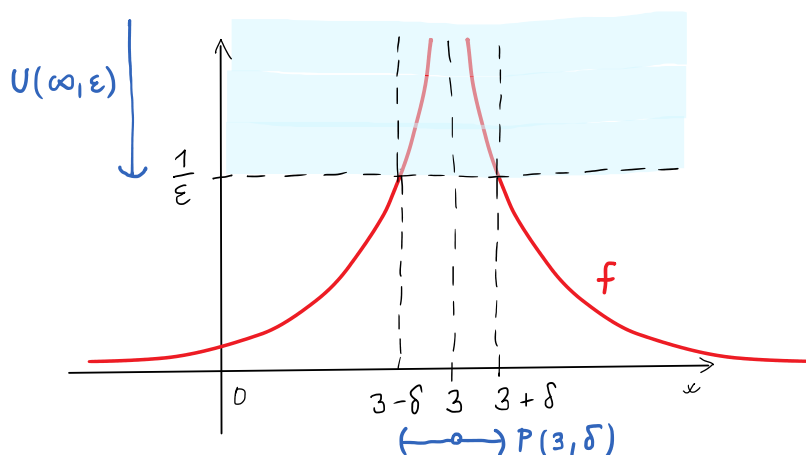
$$\lim_{x \rightarrow -1_+} \frac{x+1}{x+3-2\sqrt{x+2}} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x+3-2\sqrt{x+2}} \text{ neex.}$$

Úloha 2.

Z def. limity chceme ukázat:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in P(3, \delta) : \frac{1}{(x-3)^2} \in \underbrace{U(\infty, \varepsilon)}_{= (\frac{1}{\varepsilon}, \infty)} \quad (A)$$



Nechť $\varepsilon > 0$, hledáme δ , aby $\forall x \in P(3, \delta)$ platilo:

$$\frac{1}{(x-3)^2} > \frac{1}{\varepsilon} \quad (B)$$

$$\varepsilon > (x-3)^2$$

$$\sqrt{\varepsilon} > |x-3|$$

Volíme $\delta := \sqrt{\varepsilon}$. Pak $\forall x \in P(3, \delta)$ platí (B).

Jelikož $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, dokázali jsme (A).

úloha 3

Variananta (a):

Předpokládáme:

$$\bullet \quad \nu > 0, L \in \mathbb{R}, P(a, \nu) \subset D(f) \cap D(g) \cap D(h)$$

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

$$(ii) \quad \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$$

$$(iii) \quad f \leq g \leq h \text{ na } P(a, \nu)$$

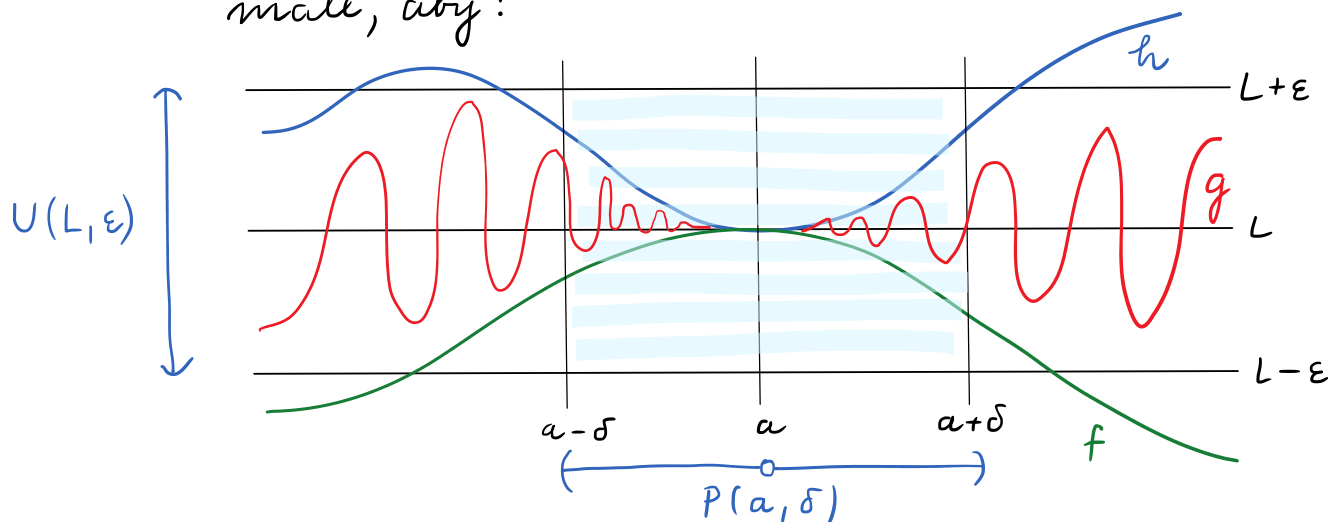
chceme ukázat:

$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existuje a je rovna L .

Přeloženo z definice – chceme ukázat:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \in (0, \nu] \forall x \in P(a, \delta): g(x) \in U(L, \varepsilon). \quad (1)$$

myšlenka: zvolím ε , najdu prv. okolí bodu $P(a, \delta)$ dost malé, aby:



Pak g ležící mezi f a h také leží v ε -pásmu.

Formální zápis:

Zvolme $\varepsilon > 0$. Z def. limit (i), (ii):

$$\exists \delta_1 \in (0, \varepsilon] \forall x \in P(a, \delta_1): f(x) \in U(L, \varepsilon),$$

$$\exists \delta_2 \in (0, \varepsilon] \forall x \in P(a, \delta_2): h(x) \in U(L, \varepsilon),$$

Označ $\delta := \min(\delta_1, \delta_2)$, pak:

$$\forall x \in P(a, \delta): (f(x) \in U(L, \varepsilon) \& h(x) \in U(L, \varepsilon))$$

Odtud a z (iii) plyne:

$$\forall x \in P(a, \delta): L - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall x \in P(a, \delta): L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon.$$

Dokázali jsme: K libovolnému $\varepsilon > 0$ umíme najít $\delta \in (0, \varepsilon]$ takové, že $\forall x \in P(a, \delta): g(x) \in U(L, \varepsilon)$.

Z definice limity tedy platí (1). □

Varianta (b):

Předpokládáme:

$$\bullet \quad \varepsilon > 0, L \in \mathbb{R}, P(a, \varepsilon) \subset D(f) \cap D(g) \cap D(h)$$

$$(I) \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

$$(II) \quad \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$$

$$(III) \quad f \leq g \leq h \text{ na } P(a, \varepsilon)$$

chceme ukázat:

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) \text{ existuje a je rovna } L.$$

Z Heineho věty je toto ekvivalentní tvrzení:

$\forall$ posloupnost bodů x_n ležících v $P(a, r)$, která } (2)
splňuje $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, platí $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = L$.

Volme tedy libovolnou posloupnost $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ takovou, že

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \forall n \in \mathbb{N} : x_n \in P(a, r), \\ \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a. \end{array} \right\} (*)$$

Pro $\forall n \in \mathbb{N}$ označme:

$$a_n := f(x_n), \quad b_n := g(x_n), \quad c_n := h(x_n).$$

Použitím implikací „(i) $\Rightarrow$ (ii)“ v Heineho větě dostáváme:

$$(I) \xrightarrow{\text{Heine}} \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{f(x_n)}_{a_n} = L, \quad (3)$$

$$(II) \xrightarrow{\text{Heine}} \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{h(x_n)}_{c_n} = L. \quad (4)$$

Navíc ze (III) plyne:

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n \leq c_n \quad (5)$$

Díky (3), (4), (5) jsou splněny předpoklady V2P pro posloupnosti (V 2.18 ve slajdech), tudíž z ní vyplývá:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{g(x_n)}_{b_n} = L \quad (6)$$

Právě jsme ukázali: libovolná $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ splňující (*) také splňuje (6). Tudíž platí (2). $\square$

KOMENTÁŘ:

- Ve výpočtu **zderivujeme**. Použili jsme AL ve verzi " $\frac{1}{\pm 0}$ "

a to, že

$$x+1 \begin{cases} > 0, & x \in (-1, \infty) \\ < 0, & x \in (-\infty, -1). \end{cases}$$

- Chcete-li použít, že $\lim_{x \rightarrow -1 \pm} \frac{1}{x+1} = \pm \infty$, musíte tuto limitu opět zderivovat jako výše.

- Formálně správně nemí psát

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x+3-2\sqrt{x+2}} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+3+2\sqrt{x+2}}{x+1},$$

protože ani jedna z limit neexistuje, což jste ukázali vzápětí. Problém se lze vyhnout vynecháním " $\lim_{x \rightarrow -1}$ " při provádění úprav výrazu.

- v Ú2 bylo úkolem věc dokázat z definice, nikoli z AL použitím $\lim_{x \rightarrow 3} (x-3)^2 = 0$. Dokázat tuto limitu je ekvivalentní důkazu $\lim_{x \rightarrow 3} (x-3)^{-2} = \infty$.

- **POZOR!**

$$(x-3)^2 < \varepsilon \not\Rightarrow x-3 < \sqrt{\varepsilon},$$

ale

$$(x-3)^2 < \varepsilon \Leftrightarrow |x-3| < \sqrt{\varepsilon} \Leftrightarrow x \in U(3, \sqrt{\varepsilon})$$

$\Downarrow$
 δ

(v důkazu jsme navíc předpokládali $x \neq 3$, takže

vyšlo $x \in P(3, \sqrt{\varepsilon}).$)

- Definici bylo třeba upravit na $L = \infty$, vedlo to na

$$U(\infty, \varepsilon) = \left(\frac{1}{\varepsilon}, \infty\right). \quad (V)$$

(Hodláte-li používat značím' se skript, buďte opatrní. Tam je totiž verze

$$U(\infty, \varepsilon) = (\varepsilon, \infty),$$

kdyžto zde používáme verzi (V).