

úloha 1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}, \quad a \in (0, \infty).$$

 $a = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0.$$

 $a \in (0, 1) \cup (1, \infty)$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln a} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{e^{x \ln a} - 1}{x \ln a}}_{\rightarrow 1 (*)} \cdot \overset{AL}{\ln a} = \ln a$$

$$\begin{aligned} (*) : f(x) &= x \underbrace{\ln a}_{\text{konst.}} \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : f(x) &\neq 0 \\ g(y) &= \frac{e^y - 1}{y} \\ \lim_{y \rightarrow 0} g(y) &= 1 \end{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \text{LSF(ii)} \\ \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln a} - 1}{x \ln a} = 1 \end{array} \right.$$

výsledek:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \quad a \in (0, \infty).$$

chyba v zadání: místo s měla být 0 .Řešení pro ostatní $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$: $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (funguje pro $\forall a \in \mathbb{R}$):

$$\lim_{x \rightarrow s} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow s} \frac{e^{x \ln a} - 1}{x} = \frac{e^{s \ln a} - 1}{s} = \frac{a^s - 1}{s},$$

protože: $x \mapsto e^{x \ln a}$ je spojitá funkce v s

$$\begin{array}{ccc} \forall 4.31 & x \mapsto x & \text{---||---} \\ \implies & x \mapsto \frac{e^{x \ln a}}{x} & \text{---||---} \end{array} \quad \begin{array}{l} s \text{ nenulovou} \\ \text{hodnotou v } s \end{array}$$

$x = \infty$:

$a > 1$:

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = \ln a \cdot e^{x \ln a} = a^x \ln a$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x - 1}{x} \stackrel{L'H \frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x \ln a}{1} = \infty$$

L'Hospital, ještě oficiálně neumíme

$a < 1$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x - 1}{x} \stackrel{AL}{=} 0$$

$a = 1$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 0 = 0$$

$x = -\infty$ analogicky:

$a < 1$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a^x - 1}{x} \stackrel{L'H \frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a^x \ln a}{1} = -\infty$$

$a > 1$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a^x - 1}{x} \stackrel{AL}{=} 0$$

$a = 1$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 0 = 0$$

úloha 2

$$\lim_{x \rightarrow s} \underbrace{\frac{\sin(e^{2x} - e^6)}{x-3}}_{=: \varphi(x)}$$

a) $s \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$:

$$\lim_{x \rightarrow s} \frac{\sin(e^{2x} - e^6)}{x-3} = \frac{\sin(e^{2s} - e^6)}{s-3},$$

protože φ je spojitá v s (podle V4.31 a spojitosti sinu).

Detailní zdůvodnění:

$$\left. \begin{array}{l} x \mapsto e^x \text{ sp.} \\ x \mapsto 2x \text{ sp.} \end{array} \right\} \xRightarrow{V4.31(ii)} x \mapsto e^{2x} \text{ sp.} \left\{ \begin{array}{l} \xRightarrow{V4.31(i)} x \mapsto e^{2x} - e^6 \text{ sp.} \\ \text{sin sp.} \end{array} \right\} \xRightarrow{V4.31(i)} x \mapsto \sin(e^{2x} - e^6) \text{ sp.} \left\{ \begin{array}{l} \xRightarrow{V4.31(i)} \varphi \text{ sp.} \\ \text{v bodě } s \\ s-3 \neq 0 \end{array} \right.$$

b) $s = \pm \infty$:

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{\sin(e^{2x} - e^6)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \underbrace{\frac{1}{x-3}}_{\substack{\downarrow \\ 0 \text{ (AL)}}} \cdot \underbrace{\sin(e^{2x} - e^6)}_{\substack{\text{omezená, protože} \\ \forall y \in \mathbb{R}: |\sin y| \leq 1}} = 0$$

c) $s = 3$:

$$\begin{aligned} \frac{\sin(e^{2x} - e^6)}{x-3} &= \frac{\sin(e^{2x} - e^6)}{e^{2x} - e^6} \cdot \frac{e^{2x} - e^6}{x-3} \\ &= \frac{\sin(e^{2x} - e^6)}{e^{2x} - e^6} \cdot \frac{e^6(e^{2x-6} - 1)}{x-3} \\ &= \frac{\sin(e^{2x} - e^6)}{e^{2x} - e^6} \cdot \frac{e^6(e^{2x-6} - 1)}{2x-6} \cdot \frac{2x-6}{x-3} \\ &= \underbrace{\frac{\sin(e^{2x} - e^6)}{e^{2x} - e^6}}_{\substack{\downarrow \\ 1 (*)}} \cdot \underbrace{\frac{(e^{2x-6} - 1)}{2x-6}}_{\substack{\downarrow \\ 1 (*)}} \cdot \underbrace{2e^6}_{\text{konst.}} \end{aligned}$$

výsledek:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(e^{2x} - e^6)}{x - 3} = 2e^6$$

(*) : $f(x) = e^{2x} - e^6$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{3\} : f(x) \neq 0 \\ (\text{v'ime: exp je rostoucí}) \\ g(y) = \frac{\sin y}{y} \\ \lim_{y \rightarrow 1} g(y) = 1 \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{LSF (ii)}} \lim_{x \rightarrow 3} \underbrace{\frac{\sin(e^{2x} - e^6)}{e^{2x} - e^6}}_{g(f(x))} = 1$$

(*) : $f(x) = 2x - 6$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{3\} : f(x) \neq 0 \\ (f \text{ je rostoucí}) \\ g(y) = \frac{e^y - 1}{y} \\ \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{LSF (ii)}} \lim_{x \rightarrow 3} \underbrace{\frac{e^{2x-6} - 1}{2x - 6}}_{g(f(x))} = 1$$

úloha 3

necht' $\lim_{x \rightarrow 0+} g(x) = L \in \bar{\mathbb{R}}$. (1)

a) g sudá

$$\lim_{x \rightarrow 0-} g(x) \stackrel{\text{sudost}}{=} \lim_{x \rightarrow 0-} g(-x) \stackrel{(*)}{\underset{\text{LSF}}{=}} \lim_{x \rightarrow 0+} g(x) = L.$$

Zdůvodnění (*):

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = -x \\ \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = 0 \\ \forall x < 0 : f(x) > 0 \\ (1) \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{jednotanná LSF (ii)}} \lim_{x \rightarrow 0-} \underbrace{g(-x)}_{g(f(x))} = L$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = L.$$

$$x \rightarrow 0$$

b) g lichá

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) \stackrel{\text{lichost}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} (-g(-x)) = - \lim_{x \rightarrow 0^-} g(-x) \stackrel{(*)}{\stackrel{\text{LSF}}{=}} - \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -L$$

Zdůvodnění (*):

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = -x \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \\ \forall x < 0: f(x) > 0 \\ (1) \end{array} \right\} \stackrel{\text{jednostranná LSF (ii)}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \underbrace{g(-x)}_{g(f(x))} = L$$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$ existuje, právě když $L = 0$.

Varianta (a) z definice:

necht $\varepsilon > 0$. Z (1) k tomuto $\varepsilon \exists \delta > 0$ tak, že:

$$g(P_+(a, \delta)) \subset U(L, \varepsilon).$$

ale $g(P_-(a, \delta)) = g(P_+(a, \delta))$, protože $\forall x \in P(a, \delta): g(x) = g(-x)$.

Tedy jsme ukázali:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: g(P_-(a, \delta)) \subset U(L, \varepsilon).$$

KOMENTÁŘ:

- Všechno zdůvodňujte. Použili jste LSF? známou limitu?
- l'Hospitala ještě neumíme, ale přijde to.
- To, že v limitě lze „dosadit“, plyne ze spojitosti funkce v daném bodě, **nikoli** z toho, že je tam jen definovaná!

Protipříklad: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{sgn} x \neq \operatorname{sgn} 0$.

- To, že $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existuje, **neznamená**, že

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ existuje!}$$

v příkladu byla f omezená a $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$.

- „Taylorovski“ limity **musí** použít správně.

Odstahující příklad:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x} = 0 \neq 1 = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y},$$

ale $x^2 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ & $x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.

- v Ú3 bylo třeba zdůvodnit, že

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} g(-x),$$

nebo to aspoň vůbec napsat. Slovní zdůvodnění symetrie zde nestačí.

- K tomu, aby lichá funkce měla v 0 obousměrnou limitu, **stačí**, aby jednostranná limita byla nulová.

Spojitosť ani definovanost v 0 **není** třeba!

např.

$$g(x) := \frac{\sin x^2}{x}$$

dáva lichou funkci, která nemá def. pro $x=0$, ale

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0.$$