Úkol 7

úloha 1

$$f(x) = \frac{4|x+1|-4}{x^2+4} = \begin{cases} \dfrac{4x}{x^2+4}, & x \geq -1; \\[2ex] \dfrac{-4x-8}{x^2+4}, & x < -1. \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{4x}{x^2+4}\right)' = 4 \cdot \dfrac{x^2+4-2x^2}{(x^2+4)^2} = 4 \cdot \dfrac{4-x^2}{(x^2+4)^2}, & x > -1 \\[2ex] \left(\dfrac{-4x-8}{x^2+4}\right)' = -4 \cdot \dfrac{x^2+4-2x^2-4x}{(x^2+4)^2} = 4 \cdot \dfrac{x^2+4x-4}{(x^2+4)^2}, & x < -1 \end{cases}$$

část (i):

Použití V 5.21 na jednostranné derivace v -1:

f spojitá v -1 zprava

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1+} f'(x) = \lim\limits_{x\to -1+} \left(4 \cdot \dfrac{x^2+4x-4}{(x^2+4)^2}\right) = -\dfrac{28}{25} \end{array}\right\} \overset{V\,5.21}{\Longrightarrow} f'_+(-1) = -\frac{28}{25}$$

f spojitá v -1 zprava

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1-} f'(x) = \lim\limits_{x\to -1-} \left(4 \cdot \dfrac{4-x^2}{(x^2+4)^2}\right) = \dfrac{12}{25} \end{array}\right\} \overset{V\,5.21}{\Longrightarrow} f'_-(-1) = \frac{12}{25}$$

$f'_-(-1) \neq f'_+(-1) \Rightarrow f'(-1)$ neexistuje.

alternativa:

$f(-1) = -\frac{4}{5}$

$$f_+(-1) = \lim_{x\to -1+} \frac{\frac{4x}{x^2+4} + \frac{4}{5}}{x+1} = \lim_{x\to -1+} \frac{20x+4x^2+16}{5(x^2+4)(x+1)}$$

zde lze také vzít l'H

$$= \lim_{x\to -1+} \frac{4}{5} \frac{(x+4)\cancel{(x+1)}}{(x^2+4)\cancel{(x+1)}} = \frac{12}{25}$$

Podobně zleva.

Část (ii):

Stacionární body:

(a) $x \in (-1, \infty)$:

$$f'(x) = 0 \iff 4 - x^2 = 0 \iff x \in \{\pm 2\}$$

Protože $-2 \notin (-1,\infty)$, jediný stac. bod na $(-1,\infty)$ je $x = 2$.

(b) $x \in (-\infty, -1)$:

$$f'(x) = 0 \iff x^2 + 4x - 4 = 0 \iff x \in \{-2 \pm 2\sqrt{2}\}$$

$$x^2 + 4x - 4 = (x+2)^2 - 8 = (x+2-2\sqrt{2})(x+2+2\sqrt{2})$$

$$-2 + 2\sqrt{2} > 0 \geq -1$$

$$-2 - 2\sqrt{2} < -1 \quad \checkmark$$

Protože $-2+2\sqrt{2} \notin (-\infty,-1)$, jediný stac. bod na $(-\infty,-1)$ je $x = -2-2\sqrt{2}$.

Kandidáti lokálního extrému:

$x \in \{-2-2\sqrt{2}, -1, 2\}$.

zde nelze jednoduše vybrat bod s nejvyšší hodnotou, nehledáme globální extrém.

Znaménko derivace:

(a) $x \in (-1, \infty)$:

$$f'(x) = 4 \cdot \frac{4-x^2}{\underbrace{(x^2+4)^2}_{>0}} \begin{cases} < 0, & x > 2; \\ > 0, & x \in (-1, 2) \end{cases}$$

(b) $x \in (-\infty, -1)$:

$$f'(x) = 4 \frac{(x+2+2\sqrt{2})\overbrace{(x+2-2\sqrt{2})}^{<0}}{\underbrace{(x^2+4)^2}_{>0}} \begin{cases} > 0, & x < -2-2\sqrt{2}; \\ < 0, & x \in (-2-2\sqrt{2}, -1) \end{cases}$$

Přehled:

		$-2-2\sqrt{2}$		-1		2	
f'	$+$	0	$-$	nex.	$+$	0	$-$
f	$\uparrow$		$\downarrow$		$\uparrow$		$\downarrow$

← Odtud teď lze rozhodnout o charakteru lokálního extrému

$\Downarrow$ v $-2-2\sqrt{2}$ má f lok. max.

$\Downarrow$ v -1 má f lok. min.

$\Downarrow$ v 2 má f lok. max.

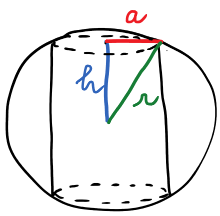
Výsledek:

Funkce f je rostoucí na $(-\infty, -2-2\sqrt{2}]$ a $[-1, 2]$,
klesající na $[-2-\sqrt{2}, -1]$ a $[2, \infty)$.

v bodech $-2-2\sqrt{2}$ a 2 nabývá f lok. maxima.
v bodě -1 nabývá f lok. minima.

Úloha 2

$V = \pi a^2 \cdot 2h$



$a^2 = r^2 - h^2$
(h je polovina výšky válce)

$$V(h) = \pi(r^2 - h^2) \cdot 2h = 2\pi(r^2 h - h^3)$$

$f(h) = r^2 h - h^3$ ← stačí maximalizovat tuto funkci, protože $V(h) = \underbrace{2\pi}_{\text{konst.}} f(h)$

$h \in [0, r]$ ← uz. omez. interval $\Rightarrow$ spoj. fce f na něm nabývá maxima.

$f'(h) = r^2 - 3h^2, \quad h \in (0, r)$

$f'(h) = 0 \iff r^2 - 3h^2 = 0 \overset{h>0}{\iff} h = \frac{r}{\sqrt{3}}$

Kandidáti extrému f:

h	$f(h)$	extrém	
0	0	min.	krajní body intervalu $[0, r]$
r	0	min.	
$\frac{r}{\sqrt{3}}$	$\frac{2r^3}{3\sqrt{3}}$	max.	

$$f\left(\frac{r}{\sqrt{3}}\right) = \frac{r^3}{\sqrt{3}} - \frac{r^3}{3\sqrt{3}} = \frac{2r^3}{3\sqrt{3}}$$

$$V\left(\sqrt{\tfrac{2}{3}}\,r\right) = 2\pi f\left(\sqrt{\tfrac{2}{3}}\,r\right) = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} r^3 .$$

alternativní postup:

$$h^2 = r^2 - a^2$$

$$h = \sqrt{r^2 - a^2} \quad (h \geq 0)$$

$$V(a) = 2\pi a^2 \sqrt{r^2 - a^2}$$

$$f(a) = a^2 \sqrt{r^2 - a^2}$$

$a \in [0, r] \longleftarrow$ uz. omez. interval
$\Rightarrow$ spoj. fce f na něm nabývá maxima.

$$f'(a) = 2a\sqrt{r^2 - a^2} - \frac{a^3}{\sqrt{r^2 - a^2}} = a\left(2\sqrt{r^2 - a^2} - \frac{a^2}{\sqrt{r^2 - a^2}}\right), \quad a \in (0, r)$$

$$f'(a) = 0 \iff 2\underbrace{\sqrt{r^2 - a^2}}_{>0} = \frac{a^2}{\sqrt{r^2 - a^2}}$$

$$\iff 2r^2 - 2a^2 = a^2 \iff 3a^2 = 2r^2 \overset{a>0}{\iff} a = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,r$$

$$f\left(\sqrt{\tfrac{2}{3}}\,r\right) = \frac{2}{3} r^2 \cdot \sqrt{\frac{1}{3} r^2} = \frac{2}{3\sqrt{3}} r^3$$

Kandidáti extrému f:

a	$f(a)$	extrém	
0	0	min.	krajní body $[0, r]$
r	0	min.	
$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\frac{2r^3}{3\sqrt{3}}$	max.	

$$V\left(\sqrt{\tfrac{2}{3}}\,r\right) = 2\pi f\left(\sqrt{\tfrac{2}{3}}\,r\right) = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} r^3 .$$

Použitelný trik v alternativním postupu:

$V(a) > 0 \implies$ stačí maximalizovat funkci

$$g(a) = \frac{V^2(a)}{4\pi^2} = a^4(r^2 - a^2) = a^4 r^2 - a^6,$$

protože zde platí: $V(x) < V(y) \iff g(x) < g(y)$.

Pointa: zjednoduší se derivování:

$$g'(a) = 4a^3 r^2 - 6a^5 = 2a^3(2r^2 - 3a^2)$$

Pro $a \in (0, r)$: $\quad g'(a) = 0 \iff a = \sqrt{\frac{2}{3}}\, r$.

Celkový výsledek:

Při poloměru podstavy $\sqrt{\frac{2}{3}}\, r$ a výšce $\frac{2r}{\sqrt{3}}$ je dosaženo max. objemu $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}} r^3$.

Úloha 3

$$f(x) = x^2 + bx + c, \qquad b \in \mathbb{R},\ c \geq 0$$

$$f'(x) = 2x + b$$

Tečna v bodě a:

$$\begin{aligned} y &= f(a) + f'(a)(x - a) \\ &= a^2 + ab + c + (2a + b)(x - a) \\ &= a^2 + ab + c - 2a^2 - ab + (2a + b)x \\ &= \underbrace{-a^2 + c}_{p} + \underbrace{(2a + b)}_{q} x \end{aligned}$$

Aby tečna procházela počátkem, musí být $c - a^2 = 0$.
Dostáváme: $a = \pm\sqrt{c}$ (víme: $c \geq 0$).

Tedy body dotyku jsou: $(-\sqrt{c}, f(-\sqrt{c}))$, $(\sqrt{c}, f(\sqrt{c}))$,
a jejich x-ové souřadnice jsou tedy symetrické
(nebo je to jediný bod v případě (ii)).

KOMENTÁŘ:

- Při práci s absolutní hodnotou (v kontextu Ú1) ji rozepište vidličkou na část „vlevo" a „vpravo". Použití vztahu
$$|x+1| = \sqrt{(x+1)^2}$$
je sice formálně OK, ale značně přidělá práci. Stejně tak vztahu
$$(|x|)' = \operatorname{sgn} x, \quad x \neq 0$$
není třeba při výše uvedeném rozdělení na „levou" a „pravou" část.

- Jednostranná derivace je jednostrannou limitou derivace za předpokladu, že původní funkce je ve zkoumaném bodě spojitá. To je třeba zmínit.

- V Ú1 se hledají lokální extrémy. Nelze tedy pouze vybrat z kandidátů toho s max./min. funkční hodnotou. To lze jen při hledání globálních extrémů za dodatečné záruky, že se jej nabývá (např. spojitá funkce na uzavřeném omezeném intervalu). To není situace v Ú1.

- Místo toho posoudíme monotonii f na intervalech mezi kandidátními body. Alternativně lze (někdy) použít test 2. derivací. To zde ale není třeba, protože vyšetření monotonie bylo stejně součástí úlohy a odtud se už monotonie pozná.

- maximální interval monotonie je takový, který už nelze dále rozšířit tak, aby na něm funkce zůstala monotonní. (neznamená to tedy „nejdelší" z intervalů.)

- v ú2 nestačí maximalizovat plochu obdélníkového průřezu válce (po ose válce). Válec s max. plochou tohoto průřezu nemá max. možný objem.

- v ú2 hledáme globální maximum spojité funkce na uzavřeném omezeném intervalu. Podle V 4.35 se ho tam nabývá a podle V 5.15 se ho nabude v jednom z kandidátů. Zde tedy stačí vybrat toho s největší funkční hodnotou.

  (Srovnejte s ú1!)