

úloha 1

$$\int \frac{e^{\operatorname{arctg} 2x}}{1+4x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{e^{\operatorname{arctg} 2x}}{1+4x^2} \cdot 2 dx = \frac{1}{2} \int e^y dy$$

$$\left[\begin{array}{l} y = \operatorname{arctg} 2x \\ dy = \frac{2}{1+4x^2} dx \end{array} \right]$$

$$= \frac{e^y}{2} + c = \frac{1}{2} e^{\operatorname{arctg} 2x} + c, \quad x \in \mathbb{R}$$

ještě rychlejší zápis:

$$\int \frac{e^{\operatorname{arctg} 2x}}{1+4x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^y dy = \frac{e^y}{2} + c = \frac{1}{2} e^{\operatorname{arctg} 2x} + c, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\left[\begin{array}{l} y = \operatorname{arctg} 2x \\ \frac{1}{2} dy = \frac{1}{1+4x^2} dx \end{array} \right]$$

úloha 2

$$\int \arcsin \frac{x}{3} dx = \int 1 \cdot \arcsin \frac{x}{3} dx$$

$$\left[\begin{array}{l} u'(x) = 1, \quad v(x) = \arcsin \frac{x}{3} \\ u(x) = x, \quad v'(x) = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}} = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} \end{array} \right]$$

$$\stackrel{P-P}{=} x \arcsin \frac{x}{3} - \int \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} dx = (*)$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{y}} dy = -\sqrt{y} + c = -\sqrt{9-x^2} + c, \quad x \in (-3, 3)$$

$$\left[\begin{array}{l} y = 9-x^2 \\ dy = -2x dx \\ -\frac{1}{2} dy = x dx \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow (*) = x \arcsin \frac{x}{3} + \sqrt{9-x^2} + c, \quad x \in (-3, 3).$$

úloha 3

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx = \int \frac{1}{1+y^2} dy = \operatorname{arctg} y + c = \operatorname{arctg}(e^x) + c, \\ \left[\begin{array}{l} y = e^x \\ dy = e^x dx \end{array} \right] \quad x \in \mathbb{R}.$$

KOMENTÁŘ

- vždy udávejte, na jakých intervalech jsou to primitivní funkce. V kontextu primitivních funkcí nás zajímají otevřené intervaly (v krajních bodech nelze derivovat oboustranně).
- nemixujte proměnné! Při provádění substituce musí zůstat v integrálu vždy buď pouze původní, nebo pouze nová proměnná (a to včetně diferenciálu dx, dt, dy ap.).