

úloha 1

$$\underbrace{\int_0^1 \frac{2x+5}{x^2+4x+8} dx}_I = \underbrace{\int_0^1 \frac{2x+4}{x^2+4x+8} dx}_{I_1} + \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{x^2+4x+8} dx}_{I_2}$$

$$I_1 = \left| \begin{array}{l} y = x^2 + 4x + 8 \\ dy = (2x + 4) dx \end{array} \right| = \int_8^{13} \frac{1}{y} dy = \ln \frac{13}{8}.$$

$$I_2 = \int_0^1 \frac{1}{(x+2)^2 + 4} = \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{x+2}{2}\right)^2 + 1} dx = \left| \begin{array}{l} y = \frac{x+2}{2} \\ dy = \frac{1}{2} dx \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{1}{y^2 + 1} dy$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 1 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{3}{2} - \frac{\pi}{8}.$$

Výsledek:

$$I = \ln \frac{13}{8} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{3}{2} - \frac{\pi}{8}$$

úloha 2

a)

$$\int_{\ln 4}^{\ln \sqrt{5}} \frac{e^{2x-1}}{e^{4x} - e^{2x} - 6} dx = \frac{1}{e} \int_{\ln 4}^{\ln \sqrt{5}} \frac{e^{2x}}{e^{4x} - e^{2x} - 6} dx$$

$$= \left| \begin{array}{l} y = e^{2x} \\ dy = 2e^{2x} dx \end{array} \right| = \frac{1}{2e} \int_{16}^5 \frac{dy}{y^2 - y - 6} = \frac{1}{2e} \int_{16}^5 \frac{dy}{(y+2)(y-3)}$$

$$e^{2 \ln 4} = 16$$

$$e^{2 \ln \sqrt{5}} = 5$$

$$= \frac{1}{2e} \int_{16}^5 \left(-\frac{1}{5}\right) \frac{1}{y+2} dy + \frac{1}{2e} \int_{16}^5 \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{y-3} dy$$

$$= -\frac{1}{10e} [\ln |y+2|]_{16}^5 + \frac{1}{10e} [\ln |y-3|]_{16}^5$$

$$= \frac{1}{10e} (\ln 18 - \ln 7 + \ln 2 - \ln 13) = \boxed{\frac{1}{10e} \ln \frac{36}{91}}$$

(výsledek je záporný, integrand je kladný na $[\ln \sqrt{5}, \ln 4]$, ale meze jsou otočeny: $\ln 4 > \ln \sqrt{5}$.)

$$b) \quad e^{4x} - e^{2x} - 6 = (e^{2x} + 2)(e^{2x} - 3)$$

$$\text{nulové body: } e^{2x} \neq -2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$e^{2x} = 3 \Leftrightarrow x \in \frac{\ln 3}{2}$$

Funkce

$$x \mapsto \frac{e^{2x}-1}{e^{4x}-e^{2x}-6}$$

je spojitá na $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\ln 3}{2}\}$

$$\stackrel{7.11}{\Rightarrow} (R) \int_a^b f(x) dx \text{ existuje pro } \forall a, b \in \mathbb{R} \text{ splňující}$$

$$\frac{\ln 3}{2} < a \leq b \quad \vee \quad a \leq b < \frac{\ln 3}{2}$$

(uvážujeme zde jen možnost $a \leq b$, pro $a \geq b$ analogicky.)

ale: funkce f není definována pro $x = \frac{\ln 3}{2}$

$$\Rightarrow (R) \int_a^b f(x) dx \text{ ani } (N) \int_a^b f(x) dx \text{ neexistují, pokud}$$

$$a < \frac{\ln 3}{2} < b.$$

lze ale ukázat, že existuje $(N) \int_{\frac{\ln 2}{3}}^b f(x) dx$ pro $b \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\ln 3}{2}\}$:

$$F(x) := \int f(x) dx = \frac{1}{10e} \ln \left| \frac{e^{2x}-3}{e^{2x}+2} \right| + C, \quad x \in (-\infty, \frac{\ln 3}{2}) \\ \vee x \in (\frac{\ln 3}{2}, \infty).$$

Tudíž pro $\forall b \in (\frac{\ln 3}{2}, \infty)$:

$$\underbrace{(N) \int_{\frac{\ln 3}{2}}^b f(x) dx}_{(*)} = \underbrace{F(b) - \lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\ln 3}{2}^+ \\ x \in \mathbb{R}}} \frac{1}{10e} \ln \left| \frac{e^{2x}-3}{e^{2x}+2} \right|}_{=-\infty} = \infty$$

$\Rightarrow$ Newtonův integrál (*) existuje (je nekonečný),

Podobně pro $\forall a \in (-\infty, \frac{\ln 3}{2})$:

$$(N) \int_a^{\frac{\ln 3}{2}} f(x) dx = \lim_{x \rightarrow \frac{\ln 3}{2}^-} \ln \left| \frac{e^{2x} - 3}{e^{2x} + 2} \right| - F(a) = -\infty.$$

Riemannovy integrály $(R) \int_a^{\frac{\ln 3}{2}} f(x) dx$, $(R) \int_{\frac{\ln 3}{2}}^b f(x) dx$, kde

$-\infty < a < \frac{\ln 3}{2} < b < \infty$, neexistují v základní verzi, ale jen ve zobecněném smyslu (bude na přednášce).

POUČENÍ:

Základní Riemannův (ani Newtonův) integrál nepřipouští „integrování přes singularitu“!

úloha 3

Nechť $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} (x^3)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2) \stackrel{AL}{=} 3x^2. \end{aligned}$$

alternativa:

$$\begin{aligned} (x^3)' &= \lim_{y \rightarrow x} \frac{y^3 - x^3}{y - x} = \lim_{y \rightarrow x} \frac{(y-x)(x^2 + xy + y^2)}{y - x} \\ &= \lim_{y \rightarrow x} (x^2 + xy + y^2) \stackrel{AL}{=} 3x^2. \end{aligned}$$

úloha 4

nechť $c \in (a, b)$. Podle základní věty kalkulu:

$$F(x) = F(c) + \int_c^x f(y) dy. \quad (\text{viz s. 497})$$

Z předpokladu: f je niem. integrovatelná na $[a, b]$,
tedy je niem. integrovatelná i na $[c, b]$ (7.13), a tudíž

$$\int_c^b f(y) dy \text{ ex. (jako Riemannův) a je konečný.}$$

Idea: $\lim_{x \rightarrow b-} F(x) = \int_c^b f(y) dy$. To dokážeme.

Protože f je spoj. na $[a, b]$, je i $|f|$ spoj. na $[a, b]$, tedy
nabývá tam maxima, a tudíž

$$M := \max \{ |f(x)| \mid x \in [a, b] \} < \infty.$$

Tedy

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \int_c^b f(y) dy - F(x) \right| = \left| \int_c^b f(y) dy - \int_c^x f(y) dy \right| \\ &= \left| \int_x^b f(y) dy \right| \leq \int_x^b |f(y)| dy \leq M(b-x), \end{aligned}$$

a proto:

$$\begin{array}{ccc} 0 & \leq & \left| \int_c^b f(y) dy - F(x) \right| \leq M(b-x) \\ \downarrow x \rightarrow b- & \underbrace{\qquad\qquad\qquad} & \downarrow x \rightarrow b- \\ 0 & \text{zp} \downarrow x \rightarrow b- & 0 \end{array}$$

Tedy platí

$$\lim_{x \rightarrow b-} \left| \int_c^b f(y) dy - F(x) \right| = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow b-} F(x) = \int_c^b f(y) dy \in \mathbb{R}.$$

□