

úloha 1

$$\begin{aligned}
 & \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^4+3} - n^2) n \operatorname{arctg}(2^n+1) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4+3-n^4}{\sqrt{n^4+3}+n^2} n \operatorname{arctg}(2^n+1) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{n^2 \left(\sqrt{1+\frac{3}{n^4}} + 1 \right)} \underbrace{\operatorname{arctg}(2^n+1)}_{\text{omezen: } |\operatorname{arctg}(2^n+1)| \leq \frac{\pi}{2}} = 0
 \end{aligned}$$

$\xrightarrow{2f} \xrightarrow{\text{LSF}} \xrightarrow{0} \xrightarrow{0 \text{ (AL)}} \xrightarrow{1f}$

alternativně:

$$\begin{aligned}
 & \lim_{y \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} y = \frac{\pi}{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{LSF} \\ \Rightarrow \operatorname{arctg}(2^n+1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2} \end{array} \right. \\
 & \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{2^n+1}_{\neq \infty} = \infty
 \end{aligned}$$

Pro použití l'H na posloupnosti bydle měli přejít k limitě funkce.

úloha 2

$$f(x) = e^{x^2-|x-1|} = \begin{cases} e^{x^2-x+1}, & x > 1 \\ e, & x = 1 \\ e^{x^2+x-1}, & x < 1 \end{cases} \quad 1f.$$

f je spojitá na $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \begin{cases} e^{x^2-x+1} (2x-1), & x > 1 \\ e^{x^2+x-1} (2x+1), & x < 1 \end{cases} \quad 1f.$$

$$\forall x \in (1, \infty): \underbrace{e^{x^2-x+1}}_{>0} \underbrace{(2x-1)}_{>0} > 0 \quad 1f.$$

$$\forall x \in (-\infty, 1): e^{x^2+x-1} (2x+1) \begin{cases} > 0, & x \in (-\frac{1}{2}, 1) \\ = 0, & x = -\frac{1}{2} \\ < 0, & x \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \end{cases} \quad 1f.$$

x	$-\frac{1}{2}$	1	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\downarrow$	el. min.	$\uparrow$

$\uparrow$ nemá extrém $\uparrow$

Pokud chceme ověřit znaménko derivace na intervalu dosazením bodu, měli bychom uvědomit, že derivace je spojitá ($f' \in C$ na (a, b)). v písemce nebude toto penalizováno.

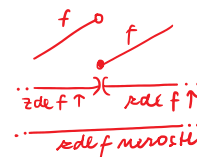
f roste na $[-\frac{1}{2}, \infty)$ (protože roste na $[-\frac{1}{2}, 1]$ a $[1, \infty)$ a v 1 je spojitá), 1b.

f klesá na $(-\infty, -\frac{1}{2}]$. 1b.

1b argumentace spojitosti pro vzájemnost v $-\frac{1}{2}$.

} v přísmee nebude realizováno, pokud alespoň napíšete správně "[a, b)" ↑

f klesá na $(-\frac{1}{2}, 1)$ a na $(1, \infty)$ (protože tam je $f' < 0$) a f je spojitá $\Rightarrow f$ klesá na $[-\frac{1}{2}, \infty)$. Bez spojitosti by se mohlo jinak stát:



v bodě $-\frac{1}{2}$ je ostré lok. min. s hodnotou $f(-\frac{1}{2}) = e^{-\frac{1}{4}}$, 1b.

protože f klesá na $(-\infty, -\frac{1}{2}]$ a roste na $[-\frac{1}{2}, \infty)$.

Toto minimum je i globální na $\mathbb{R}$ ze stejného důvodu. 1b.

globálního maxima se nenajde, neboť 1b.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\underbrace{x(x-1+\frac{1}{x})}_{\xrightarrow{AL} \infty}} = \infty. \quad \text{LSF(ii)}$$

Jednodušší důvod:

f ostře roste na $[-\frac{1}{2}, \infty)$
" klesá " $(-\infty, -\frac{1}{2}]$

úkol 3 vložit v PDF.