

- 1) *Z každé reálné posloupnosti lze vybrat její konvergentní podposloupnost.*

Tvrzení neplatí.

Protipříklad: Posloupnost

$$a_n = n, \quad n \in \mathbb{N},$$

diverguje k nekonečnu, tudíž jakákoli její podposloupnost též diverguje k nekonečnu (viz Tvrzení 2.20.) $\square$

Toto tvrzení není ve sporu s Bolzanovou–Weierstrassovou větou (2.25), neboť zde **chybí předpoklad omezenosti**.

- 2) *Součet omezené a konvergentní posloupnosti je vždy omezená posloupnost.*

Tvrzení platí.

Důkaz: Konvergentní posloupnost je omezená (viz Větu 2.10). Součet dvou omezených posloupností je opět omezená posloupnost, viz např. odhad

$$|a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n|.$$

$\square$

- 3) *Funkce, která je definovaná na okolí bodu $a \in \mathbb{R}$, ale není v tomto bodě spojitá, v bodě a nemůže nabývat lokálního extrému.*

Tvrzení neplatí.

Protipříklad: Uvažujte např. funkci

$$f(x) := \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1 - x, & x \geq 0. \end{cases}$$

Z grafu je snadno vidět, že v bodě 0 nabývá f ostrého lokálního maxima (dokonce i globálního), přestože v 0 není f spojitá. $\square$

- 4) *Součet dvou konvexních funkcí (se stejným definičním oborem) je konvexní funkce.*

Tvrzení platí.

Důkaz: Použijeme definici konvexity. Nechť f, g jsou konvexní na intervalu $I \subset \mathbb{R}$ (v přednášce jsme definovali konvexitu pouze na intervalech, tak se toho budeme držet.) Nechť $x, y, z \in I$, $x < y < z$. Pak platí

$$\begin{aligned} \frac{(f(x) + g(x)) - (f(y) + g(y))}{x - y} &= \frac{f(x) - f(y)}{x - y} + \frac{g(x) - g(y)}{x - y} \\ &\leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z} + \frac{g(y) - g(z)}{y - z} \\ &= \frac{(f(y) + g(y)) - (f(z) + g(z))}{y - z}. \end{aligned} \tag{1}$$

Tudíž je $(f + g)$ konvexní funkce (viz Definici 5.38). V kroku (1) jsme použili předpoklad konvexity funkcí f, g . $\square$

- 5) *Každá funkce, která je diferencovatelná na otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$, má na tomto intervalu primitivní funkci.*

Tvrzení platí.

Důkaz: Diferencovatelná funkce je spojitá (viz Větu 5.5). Spojitá funkce na otevřeném intervalu má tamtéž primitivní funkci (viz Větu 6.8). $\square$