Cvičení 1

Úloha 1. Najděte všechna řešení následujících rovnic a nerovnic v $\mathbb{R}$.

(a) $3x - 5 \geq 0$ (b) $x^2 + 3x = 1$ (c) $4x^2 + 4x + 1 = 0$

(d) $3x^2 - 2x + 2 = 0$ (e) $x^2 - x - 2 \geq 0$ (f) $-x^2 + 1 > 0$

(g) $-x^2 + 2x - 1 < 0$ (h) $x^2 + 1 \geq 0$ (i) $(x-1)(x+2)(x-3) > 0$

(j) $\dfrac{x-1}{x-3} \leq 0$ (k) $\dfrac{(x+1)(x+2)^2}{(x-1)(x-2)} \geq 0$ (l) $\dfrac{x+1}{x-1} \geq \dfrac{x+1}{x+2}$

Úloha 2. Pomocí doplnění na čtverec odvoďte vzorec pro tvar řešení kvadratické rovnice

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

kde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Úloha 3. Vyjádřete následující čísla ve tvaru p/q, kde $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$.

(a) $0,\overline{9}$ (b) $1,\overline{7}$ (c) $0,2\overline{53}$

Úloha 4. Ukažte, že $\log 2$ není racionální číslo ($\log$ = dekadický logaritmus).

Úloha 5. Najděte supremum, infimum a maximum, minimum (existují-li) následujících množin:

(a) $\{z \in \mathbb{Z} \mid z < 0\}$ (b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ (c) $(-1, 2] \cup (3, 7]$

(d) $[0, 2] \cap \mathbb{Q}$ (e) $\left[0, \frac{1}{3}\right] \cap \{2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ (f) $\left\{\frac{n+1}{n+2} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}$

Úloha 6. Dokažte, že následující vztahy platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$, pomocí matematické indukce nebo jinak.

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$

(c) $\displaystyle\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$, $0 \leq k \leq n$ (d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

(e) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$ (f) $(n+1)^n \leq n^{n+1}$