

Cvičení 3

Úloha 1. Spočítejte následující limity nebo ukažte, že neexistují. Uvádějte zdůvodnění.

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^4 - 5n^3 - 20n + 6$ (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 2n^2 - 6}{3n^2 + 5n + 1}$
 (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10n^2 - 6n + 5}{2n^2 - 3n + 7}$ (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} (2 \cdot (-3)^{2n-1} - 5 \cdot 7^{n+2})$
 (e) $\lim_{n \rightarrow \infty} (2 \cdot 5^{n+1} + 3 \cdot (-2)^{2n})$ (f) $\lim_{n \rightarrow \infty} (2 \cdot (-5)^{n-1} - 5 \cdot 2^{2n+2})$

Úloha 2. Spočítejte následující limity nebo ukažte, že neexistují. Uvádějte zdůvodnění.

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 3^n + (-1)^n}{4^n}$ (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot 2^n + (-3)^n}{3^n - 2^{2n+1}}$ (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot 2^n + (-3)^n}{3^n}$

Úloha 3. Spočítejte následující limity nebo ukažte, že neexistují. Uvádějte zdůvodnění.

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\sqrt{2n+1} - \sqrt{n})$
 (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - 4n} - n)$ (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n-2) (\sqrt{4n^2 + 3} - 2n)$
 (e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n+1} (\sqrt{n^3 - 2n + 1} - \sqrt{n^3 - n^2})}{2n - 4}$ (f) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{3^{2n} + (-2)^{n+1}} - \sqrt{3^{2n} + 4^n})$

Úloha 4. Napište negace následujících výroků:

(i) *Existence limity posloupnosti:*

$$\exists L \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n > n_0: a_n \in U(L, \varepsilon).$$

(ii) *Bolzanova–Cauchyova podmínka:*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m, n \in \mathbb{N}, m > n_0, n > n_0: |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Úloha 5*. Napište negace následujících výroků. Dokažte, že daný výrok platí, nebo najděte protipříklad.

- (i) $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R}, \left| \frac{x}{a} - 1 \right| < \delta: x \in U(a, \varepsilon).$
 (ii) $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \exists \delta > 0 \forall \varepsilon > 0 \forall x \in \mathbb{R}, \left| \frac{x}{a} - 1 \right| < \delta: x \in U(a, \varepsilon).$
 (iii) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \forall x \in \mathbb{R}, \left| \frac{x}{a} - 1 \right| < \delta: x \in U(a, \varepsilon).$

Úloha 6*. Spočítejte následující limity. Uvádějte zdůvodnění.

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)^{100} - (n+2)^{100}}{(n+1)^{100} - n^{100}}$ (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{n^2}$
 (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{n^3}$ (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3}{n^4}$

Hint: (a) binomická věta; (b) devítiletý Gauss; (c),(d) Úloha 6 ze Cvičení 1.