

Cvičení 4

Úloha 1. Pomocí geometrické definice sinu a kosinu (obrázek s jednotkovou kružnicí) stanovte hodnoty sinu a kosinu v bodech $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$.

Úloha 2. Dokažte, že platí následující rovnosti:

$$\begin{aligned}\operatorname{argsinh} x &= \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right), & x &\in \mathbb{R}; \\ \operatorname{argcosh} x &= \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right), & x &\geq 1.\end{aligned}$$

Úloha 3. Spočítejte následující limity nebo ukažte, že neexistují. Existují-li alespoň jednostranné limity, najděte ty. Uvádějte zdůvodnění.

$$\begin{array}{ll}(\text{a}) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 4}{x^3 - 6x^2 + 1} & (\text{b}) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^5 + x^4 - 10x}{1 - 3x^5} \\ (\text{c}) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1} & (\text{d}) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 + x - 6} \\ (\text{e}) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2}{x^2 + 2x + 1} & (\text{f}) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1 - 2x}{x^2 + 2x - 15}\end{array}$$

Úloha 4. Spočítejte následující limity nebo ukažte, že neexistují. Existují-li alespoň jednostranné limity, najděte ty. Uvádějte zdůvodnění.

$$\begin{array}{ll}(\text{a}) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} & (\text{b}) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + (x + 1) \cos x}{x^2 + x + 4} \\ (\text{c}) \lim_{x \rightarrow \infty} x + \cos(x^2) & (\text{d}) \lim_{x \rightarrow \infty} ax + x \cos x, \quad a \in \mathbb{R}\end{array}$$

Úloha 5. Určete definiční obor funkcí daných následujícími předpisy a jejich (jednostranné) limity v krajních bodech definičního oboru. Uvádějte zdůvodnění. (Někdy je nutné použít Větu o limitě složené funkce).

$$\begin{array}{ll}f_1(x) := \arcsin \left(\frac{1-x}{1+x} \right) & f_4(x) := \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{\frac{1}{x-3}} \\ f_2(x) := \operatorname{cotgh} x & f_5(x) := \sin \left(\frac{1}{x} \right) \\ f_3(x) := \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}} & f_6(x) := x \sin \left(\frac{1}{x} \right)\end{array}$$