

Cvičení 7

Úloha 1. Spočítejte následující limity nebo dokažte, že neexistují. Uvádějte zdůvodnění.

- (a) $\lim_{x \rightarrow 3+} \frac{\ln(x^2 - 8)}{x^2 - 3x}$ (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2 - 8)}{x^2 - 3x}$ (c) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\ln(x^2 - 8)}{x^2 - 3x}$
- (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin ax}{\ln \sin bx}$, $a, b > 0$ (e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + \sin x}{e^x + \cos x}$ (f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cosh x}{\sinh x}$
- (g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x - 3^x + x^9 - x^7}{3^x - 10x^{25}}$ (h) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x - 2^{\cos x}}{2^x + \ln(x^2 + 1)}$ (i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{x+\cos x}}{2^{ax}}$, $a > 0$
- (j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x^2 + \sin x) \operatorname{arctg} 4x}{e^{\sqrt{x}} \ln(x + 1)}$ (k) $\lim_{x \rightarrow 1+} \left(\frac{3}{x^2 - 1} \right)^{\sin(x-1)}$ (l) $\lim_{x \rightarrow 0+} \sqrt[x^2]{\frac{\sin x}{x}}$

Úloha 2.

- (a) Určete rovnici tečny a normály ke grafu funkce $x \mapsto x^3 + 2x + 1$ v bodě $(4, ?)$.
- (b) Určete bod na grafu funkce $x \mapsto e^x$, v němž je tečna ke grafu rovnoběžná s přímkou danou rovnicí $3x - 4y + 5 = 0$.
- (c) Najděte všechny body na grafu funkce $x \mapsto x^2 - x + 9$ takové, že tečna ke grafu vedená těmito body prochází počátkem.

Úloha 3.

Dokažte toto tvrzení:

Nechť funkce f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ kladnou derivaci. Potom existuje $\delta > 0$ takové, že platí

$$\forall x \in (a - \delta, a): f(x) < f(a)$$

a zároveň

$$\forall y \in (a, a + \delta): f(a) < f(y).$$

Hint. Použijte definici derivace a definici limity (derivace je definována jistou limitou).