

Reálná čísla

1. Určete maximum, minimum, supremum a infimum následujících množin:

a) $\mathbb{Z}$;

b) $M = (-1, 1) \cup \langle 3, 5 \rangle$;

c) $M = \langle 0, \sqrt{2} \rangle \cap \mathbb{Q}$;

d) $M = \{1 + 2^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$;

e) $M = \langle 0, \frac{1}{3} \rangle \cap \{2^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$;

f) $M = \{(-1)^n \frac{n^2-1}{n^2+1} : n \in \mathbb{N}\}$.

Výsledky

1. a) $\max \mathbb{Z}$ ani $\min \mathbb{Z}$ neexistují, $\sup \mathbb{Z} = +\infty$, $\inf \mathbb{Z} = -\infty$;
b) $\max M = 5 = \sup M$, $\min M$ neexistuje, $\inf M = -1$;
c) $\max M$ neexistuje, $\sup M = \sqrt{2}$, $\min M = 0 = \inf M$;
d) $\max M = \frac{3}{2} = \sup M$, $\min M$ neexistuje, $\inf M = 1$;
e) $\max M = \frac{1}{4} = \sup M$, $\min M$ neexistuje, $\inf M = 0$;
f) $\max M$ ani $\min M$ neexistují, $\sup M = 1$, $\inf M = -1$.

Funkce

1. Určete definiční obor funkce:

- | | | |
|--|----------------------------------|--------------------------------------|
| a) $\frac{x^2}{x+1}$; | b) $\frac{x+2}{x^2-x-6}$; | c) $\sqrt{2+x-x^2}$; |
| d) $\sqrt{3x-x^3}$; | e) $\frac{1}{\sqrt{x^2-3x+2}}$; | f) $\sqrt{x^2-1}+\sqrt{1-x}$; |
| g) $\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}+\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$; | h) $\sqrt{1- x }$; | i) $\log_2 \log_3 \log_4 x$; |
| j) $\frac{\ln(x+1)}{2^x-1}$; | k) $\ln \sin x $; | l) $\arcsin \sqrt{\frac{2x+1}{2}}$; |
| m) $(\arctg(x-1))^{1/(x-3)}$; | | |
| n) $\log(1-\log(x^2-4x+13))$. | | |

2. Vyšetřete omezenost funkce:

- | | | | |
|----------------------|-----------------|------------------|------------------------|
| a) $\frac{3}{x-2}$; | b) x^2+6x-4 ; | c) $-2x^2+x+5$; | d) $\frac{1}{x^2+1}$. |
|----------------------|-----------------|------------------|------------------------|

3. Určete, zda je funkce sudá nebo lichá:

- | | | |
|-----------------------------|--|----------------------------|
| a) $5x-x^3$; | b) x^4+3x^2-1 ; | c) x^2+3x-2 ; |
| d) 2^x-2^{-x} ; | e) $\ln \frac{1-x}{1+x}$; | f) $\frac{e^x-1}{e^x+1}$; |
| g) $\log(\sqrt{x^2+1}+x)$; | h) $\frac{\sin x}{x}$; | i) 2^{-x^2} ; |
| j) $\sin x - \cos x$; | k) $\sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)^2}$. | |

4. Vyšetřete, zda je funkce periodická, a pokud ano, určete její periodu:

- | | | |
|------------------------------|---|-----------------------------------|
| a) $\sin 3x$; | b) $5 \cos 2x$; | c) $4 \sin \pi x$; |
| d) $-3 \cos(4x+5)$; | e) $\sqrt{\operatorname{tg} x}$; | f) $\operatorname{tg} \sqrt{x}$; |
| g) $2 \sin 3x + 3 \sin 2x$; | h) $\sin(5\pi x + \frac{\pi}{4}) - \cos \frac{\pi}{6} - 3\pi x$. | |

5. Dokažte:

- | |
|---|
| a) $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$; |
| b) $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$. |

Výsledky

1. a) $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$; b) $(-\infty, -2) \cup (-2, 3) \cup (3, +\infty)$; c) $\langle -1, 2 \rangle$;
d) $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup \langle 0, \sqrt{3} \rangle$; e) $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$; f) $(-\infty, -1) \cup \{1\}$; g) $\emptyset$;
h) $\langle -1, 1 \rangle$; i) $(4, +\infty)$; j) $(-1, 0) \cup (0, +\infty)$; k) $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (k\pi, (k+1)\pi)$; l) $\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle$;
m) $(1, 3) \cup (3, +\infty)$; n) $(1, 3)$.
2. a) není omezená ani zdola, ani shora; b) omezená zdola; c) omezená shora;
d) omezená.
3. a) lichá; b) sudá; c) ani sudá ani lichá; d) lichá; e) lichá; f) lichá; g) lichá;
h) sudá; i) sudá; j) ani sudá ani lichá; k) sudá.
4. a) $\frac{2}{3}\pi$; b) π ; c) 2; d) $\frac{1}{2}\pi$; e) π ; f) není periodická; g) 2π ; h) 2.

Limity funkcí

1. Spočtěte:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^3 + 3}; & \text{b)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 1}{x^4 + 1}; & \text{c)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - 2x + 1}{2x^2 + 3x - 1}; \\ \text{d)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3 - 2x + 5}{x^3 + x^2 + 1}; & \text{e)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 2x}{x^2 + 1}; & \text{f)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + x^2 + 1}{x^2 + x + 3}; \\ \text{g)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^5 + x^3 + 2}{2x^3 - 1}; & \text{h)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - x^5}{1 + x^2}. \end{array}$$

2. Spočtěte:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 + 2x - 2}; & \text{b)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 1}; & \text{c)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 3x + 2}; \\ \text{d)} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 4}{x^2 - 4x + 3}; & \text{e)} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 2}{x^2 + 2x + 1}; & \text{f)} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right). \end{array}$$

3. Spočtěte:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 1}{\sqrt{x - 1} + 2}; & \text{b)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 2}{\sqrt{x^2 - 4} - 2}; & \text{c)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 1}{\sqrt{4x^2 - 2} + 1}; \\ \text{d)} \lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x - 2} - 2}{x - 6}; & \text{e)} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{\sqrt{x + 2} - 1}; & \text{f)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x - 1} + \sqrt{x + 1}}{x}; \\ \text{g)} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - x); & \text{h)} \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2} + x); & \text{i)} \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2} - x). \end{array}$$

4. Spočtěte:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x + \cos x}; & \text{b)} \lim_{x \rightarrow +\pi/2} \frac{\cos 2x}{1 - \sin x}; & \text{c)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}; \\ \text{d)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}; & \text{e)} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x + \cos x); & \text{f)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x \sin x}{x + 1}; \\ \text{g)} \lim_{x \rightarrow -\infty} (4e^x - \sin x); & \text{h)} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} \cos x; & \text{i)} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} \cos(3x + 1). \end{array}$$

5. Spočtěte:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{2x^2 + 3x - 5}; & \text{b)} \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{x + 1}{x - 1}}; & \text{c)} \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}; \\ \text{d)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos \frac{1}{x}; & \text{e)} \lim_{x \rightarrow \pi} \ln^2(1 + \cos x); & \text{f)} \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{1/x}; \\ \text{g)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3e^{2x}}{e^{2x} + 1}; & \text{h)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \arcsin \frac{1 - x}{1 + x}; & \text{i)} \lim_{x \rightarrow 2} x^{-2} \sqrt{x}. \end{array}$$

6. Spočtěte limity funkce v hraničních bodech definičního oboru:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \frac{\cos x}{2x - 1}; & \text{b)} \operatorname{arctg} \frac{1 + x}{1 - x}; & \text{c)} (\operatorname{tgh} x)^{1/(x-1)}. \end{array}$$

Výsledky

1. a) 0; b) 0; c) 2; d) 3; e) $+\infty$; f) $-\infty$; g) $+\infty$; h) $+\infty$.
2. a) $\frac{2}{3}$; b) 0; c) 3; d) neexistuje, $\mp\infty$ v $3\pm$; e) $+\infty$; f) $-\frac{1}{2}$.
3. a) $+\infty$; b) 3; c) -1 ; d) $\frac{1}{4}$; e) 2; f) 0; g) 1; h) 0; i) $+\infty$;
4. a) 1; b) $-\infty$; c) nelze počítat, $+\infty$ v $1-$; d) 0; e) $+\infty$; f) $-\infty$;
g) neexistuje; h) neexistuje; i) 0.
5. a) $+\infty$; b) nelze počítat, $+\infty$ v $1+$; c) neexistuje; d) 1; e) $+\infty$; f) $+\infty$;
g) 3; h) $-\frac{1}{2}\pi$; i) neexistuje, 0 v $2-$, $+\infty$ v $2+$.
6. a) neexistuje v $-\infty$, $\pm\infty$ v $0\pm$, 0 v $+\infty$;
b) $-\frac{1}{4}\pi$ v $\pm\infty$, $\mp\frac{1}{2}\pi$ v $1\pm$;
c) $+\infty$ v $0+$ a v $1-$, 0 v $1+$, 1 v $+\infty$.

Derivace funkce

1. Spočtěte derivaci funkce:

a) $3x^2 - 5x + 1$;

b) $2\sqrt{x} - \frac{1}{x}$;

c) $\frac{1}{\sqrt[5]{x^3}} + \frac{2}{x^3}$;

d) $\frac{x}{x^3 + 1}$;

e) $(x^2 + 1)^4$;

f) $\sqrt{x^3 + 1}$.

2. Spočtěte derivaci funkce:

a) $\sqrt[4]{x} \cos x$;

b) $e^x \sin x$;

c) $x^2 e^x \cos x$;

d) $x \cdot \sin x \cdot \operatorname{arctg} x$;

e) $\frac{e^x}{\sin x}$;

f) $\cotg x$.

3. Spočtěte derivaci funkce

a) $\sin(2x + 5)$;

b) e^{-3x+1} ;

c) 10^x ;

d) $\ln^2 x$;

e) $\ln \operatorname{tg} x$;

f) $\arccos \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$;

g) $\sqrt{\ln^2 x + 1}$;

h) $\ln \cosh x$;

i) $\ln \ln \sin x$.

4. Spočtěte derivaci funkce:

a) x^x ;

b) $x^{\sin x}$;

c) x^{x^2} ;

d) $\left(\frac{x}{x+1}\right)^x$;

e) $(x^2 + 1)^{\cos \pi x}$.

5. Spočtěte derivaci druhého řádu:

a) $x e^{x^2}$;

b) $(x^2 + 1) \operatorname{arctg} x$;

c) $\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

6. Vyjádřete derivaci řádu n ;

a) e^{ax} ;

b) $x e^x$;

c) $x \ln x$.

Výsledky

1. a) $6x - 5$; b) $x^{-1/2} + x^{-2}$; c) $-\frac{3}{5}x^{-8/5} - 6x^{-4}$, $x \neq 0$; d) $\frac{1-2x^3}{(x^3+1)^2}$; e) $8x(x^2+1)^3$;
f) $\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}$, $x \neq -1$.
2. a) $\frac{1}{4}x^{-3/4}\cos x - \sqrt[4]{x}\sin x$; b) $e^x \sin x + e^x \cos x$; c) $2xe^x \cos x + x^2 e^x \cos x - x^2 e^x \sin x$;
d) $\sin x \operatorname{arctg} x + x \cos x \operatorname{arctg} x + \frac{x \sin x}{x^2+1}$; e) $\frac{e^x(\sin x - \cos x)}{\sin^2 x}$; f) $-\frac{1}{\sin^2 x}$.
3. a) $2\cos(2x+5)$; b) $-3e^{-3x+1}$; c) $10^x \ln 10$; d) $\frac{2}{x} \ln x$; e) $\frac{1}{\sin x \cos x}$;
f) $\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{1+2x-2x^2}}$; g) $\frac{\ln x}{x\sqrt{\ln^2 x+1}}$; h) $\operatorname{tgh} x$; i) funkce není definována pro žádné x .
4. a) $x^x(\ln x+1)$; b) $x^{\sin x}(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x})$; c) $x^{x^2+1}(2\ln x+1)$; d) $(\frac{x}{x+1})^x(\frac{1}{x+1} + \ln \frac{x}{x+1})$;
e) $(x^2+1)^{\cos \pi x}(-\sin \pi x \cdot \pi \cdot \ln(x^2+1) + \cos \pi x \cdot \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x)$.
5. a) $2e^{x^2}(2x^3+3x)$; b) $\frac{2x}{x^2+1} + 2\operatorname{arctg} x$; c) $\frac{-x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$.
6. a) $a^n e^{ax}$; b) $e^x(x+n)$; c) $(-1)^n(n-2)!x^{1-n}$.

Aplikace derivací

1. Spočtete

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 4x}; & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{\ln x}; & \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}; & \text{d) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln^2 x}{x-1}; \\ \text{e) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{(x-1)^2}; & \text{f) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh 2x}{3x}; & \text{g) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x+2}; & \text{h) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{5x+3}; \\ \text{i) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+1}; & \text{j) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}; & \text{k) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}; & \text{l) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}. \end{array}$$

2. Spočtete:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}; & \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 2x^2}{e^x}; & \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - \cos x}{x^2}; \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(x^2 - 8)}{x^2 - 3x}; & \text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 - 8)}{x^2 - 3x}; & \text{f) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin 2x}{\ln \sin 3x}. \end{array}$$

3. Spočtete:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} x^3 e^{-x}; & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} x \cotg x; & \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\pi - 2 \operatorname{arctg} x); \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}; & \text{e) } \lim_{x \rightarrow 0+} x^a \ln x \quad (a > 0); & \text{f) } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^{-x} \quad (n \in \mathbb{N}). \end{array}$$

4. Spočtete:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0+} x^x; & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}; & \text{c) } \lim_{x \rightarrow \pi/2} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}; \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^x; & \text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\cos \frac{1}{x} \right)^{x^2}; & \text{f) } \lim_{x \rightarrow 0+} (\cotg x)^{\sin x}. \end{array}$$

5. Určete rovnice tečny a normály grafu funkce f v bodě A :

$$\text{a) } f(x) = \ln x, \quad A = [1, ?]; \quad \text{b) } f(x) = 2x^2 - 1, \quad A = [\tfrac{1}{2}, ?].$$

6. Určete Taylorův polynom řádu n funkce f v bodě a :

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(x) = \frac{1}{1-x}, \quad a = 0, \quad n = 3; & \text{b) } f(x) = \operatorname{arctg} x, \quad a = 0, \quad n = 3; \\ \text{c) } f(x) = \ln(1+x), \quad a = 0, \quad n = 4; & \text{d) } f(x) = \sqrt[k]{1+x} \quad (k \in \mathbb{N}), \quad a = 0, \quad n = 1; \\ \text{e) } f(x) = \sin x, \quad a = \frac{\pi}{4}, \quad n = 3; & \text{f) } f(x) = x^2 e^{x+1}, \quad a = -1, \quad n = 3. \end{array}$$

Výsledky

1. a) $\frac{3}{4}$; b) $-\pi$; c) 2; d) 0; e) neexistuje, $\pm\infty$ v $1\pm$; f) $\frac{2}{3}$; g) 0; h) $+\infty$;
i) 0; j) 1; k) $\frac{1}{3}$; l) 0.
2. a) $\frac{1}{2}$; b) 0; c) 1; d) 2; e) 0; f) nelze počítat, 1 v $0+$.
3. a) 0; b) 1; c) 2; d) $\frac{2}{\pi}$; e) 0; f) ∞ pro n sudé, $-\infty$ pro n liché.
4. a) 1; b) $\frac{1}{e}$; c) 1; d) $+\infty$; e) $e^{-1/2}$; f) 1.
5. a) tečna: $y = x - 1$, normála: $y = -x + 1$; b) tečna: $y = 2x - \frac{3}{2}$, normála: $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$.
6. a) $1 + x + x^2 + x^3$; b) $x - \frac{1}{3}x^3$; c) $x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$; d) $1 + \frac{1}{k}x$;
e) $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(x - \frac{\pi}{4}) - \frac{\sqrt{2}}{4}(x - \frac{\pi}{4})^2 - \frac{\sqrt{2}}{12}(x - \frac{\pi}{4})^3$; f) $1 - (x + 1) - \frac{1}{2}(x + 1)^2 + \frac{1}{6}(x + 1)^3$.

Průběh funkce

1. Určete maximální intervaly monotonie a lokální extrémy funkce:

a) $f(x) = \frac{2x+1}{x+5}$;	b) $f(x) = x + \frac{1}{x}$;	c) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$;
d) $f(x) = x^2 e^x$;	e) $f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$;	f) $f(x) = x \ln x$;
g) $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$;	h) $f(x) = x - \sin x$;	i) $f(x) = e^{- x }$;
j) $f(x) = x^3 e^{- x }$;	k) $f(x) = \sqrt[3]{1-x^2}$;	l) $f(x) = (x-1) x+3 $.

2. Určete maximum a minimum funkce:

a) $f(x) = x^3 - 12x + 4$, $x \in \langle -3, 3 \rangle$;	b) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1$, $x \in \langle -2, 1 \rangle$;
c) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 3$, $x \in \langle -1, 3 \rangle$;	d) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$, $x \in \langle -2, 3 \rangle$;
e) $f(x) = \arccos \frac{1}{x}$, $x \in \langle 1, +\infty \rangle$;	f) $f(x) = x \ln^2 x$, $x \in (0, 1)$;
g) $f(x) = x + e^{-x}$, $x \in (-\infty, +\infty)$;	h) $f(x) = x e^{-x}$, $x \in (0, +\infty)$;
i) $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$, $x \in (-1, 1)$;	j) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$, $x \in (-\infty, +\infty)$.

3. a) Určete rozměry obdélníku s největším obsahem vepsaného do půlkruhu o poloměru r .
b) Určete rozměry kváдру se čtvercovou podstavou, který má při objemu V nejmenší povrch.
c) Určete rozměry válce s největším objemem vepsaného do koule o poloměru r .
d) Určete rozměry válce s největším obsahem pláště vepsaného do koule o poloměru r .
4. Určete intervaly konvexity a konkavity a body inflexe funkce:

a) $2x^4 - 3x^2 + 2x + 2$;	b) $x^5 - 10x^2 + x + 3$;	c) $x^4 + x^2 + e^x$;
d) $x e^x$;	e) $(x^2 + 1) e^x$;	f) $x + \sin x$;
g) $\frac{x}{x^2+1}$;	h) $\frac{ x-1 }{x^2}$;	i) $\sqrt[3]{x+3}$.

5. Určete asymptoty grafu funkce:

a) $\frac{2x+1}{3x-1}$;	b) $\frac{x+1}{x^2+3x+2}$;	c) $\frac{x^2-2x}{x+1}$;	d) $\frac{x^3+1}{x-1}$;
e) $x + e^{-x}$;	f) $x \ln x$;	g) $\operatorname{arctg} \frac{x+1}{x-1}$;	h) $\ln \frac{1-x}{1+x}$;
i) $e^x \cos x$;	j) $\ln(3e^{2x} - 1)$.		

Výsledky

1. a) na $(-\infty, -5)$ a $(-5, +\infty)$ rostoucí, lokální extrémy nemá; b) na $(-\infty, -1)$ a $\langle 1, +\infty)$ rostoucí, na $\langle -1, 0)$ a $(0, 1)$ klesající, $f(-1) = -2$ ostré lokální maximum, $f(1) = 2$ ostré lokální minimum; c) na $(-\infty, -1)$ a $\langle 1, +\infty)$ klesající, na $\langle -1, 1)$ rostoucí, $f(-1) = -\frac{1}{2}$ ostré lokální minimum, $f(1) = \frac{1}{2}$ ostré lokální maximum; d) na $(-\infty, -2)$ a $\langle 0, +\infty)$ rostoucí, na $\langle -2, 0)$ klesající, $f(-2) = 4e^{-2}$ ostré lokální maximum, $f(0) = 0$ ostré lokální minimum; e) na $(0, 1)$ klesající, na $\langle 1, +\infty)$ rostoucí, $f(1) = 1$ ostré lokální minimum; f) na $(0, e^{-1})$ klesající, na $\langle e^{-1}, +\infty)$ rostoucí, $f(e^{-1}) = -e^{-1}$ ostré lokální minimum; g) na $(-1, 1)$ rostoucí, lokální extrémy nemá; h) na $\mathbb{R}$ rostoucí, lokální extrémy nemá; i) na $(-\infty, 0)$ rostoucí, na $\langle 0, +\infty)$ klesající, $f(0) = 1$ ostré lokální maximum; j) na $(-\infty, -3)$ a $\langle 3, +\infty)$ klesající, na $\langle -3, 3)$ rostoucí, $f(-3) = -27e^{-3}$ ostré lokální minimum, $f(3) = 27e^{-3}$ ostré lokální maximum; k) na $(-\infty, 0)$ rostoucí, na $\langle 0, +\infty)$ klesající, $f(0) = 1$ ostré lokální maximum; l) na $(-\infty, -3)$ a $\langle -1, +\infty)$ rostoucí, na $\langle -3, -1)$ klesající, $f(-3) = 0$ ostré lokální maximum, $f(-1) = -4$ ostré lokální minimum.
2. a) $\max f = f(-2) = 20$, $\min f = f(2) = -12$; b) $\max f = f(1) = 6$, $\min f = f(-2) = -3$; c) $\max f = f(3) = 12$, $\min f = f(2) = -13$; d) $\max f = f(0) = f(3) = 2$, $\min f = f(-2) = -18$; e) $\max f$ neexistuje, $\min f = f(1) = 0$; f) $\max f = f(e^{-2}) = 4e^{-2}$, $\min f = f(1) = 0$; g) $\max f$ neexistuje, $\min f = f(0) = 1$; h) $\max f = f(1) = e^{-1}$, $\min f$ neexistuje; i) $\max f$ neexistuje, $\min f$ neexistuje; j) $\max f = f(1) = \frac{1}{2}$, $\min f = f(-1) = -\frac{1}{2}$.
3. a) strany $\sqrt{2}r$ a $\frac{\sqrt{2}}{2}r$, obsah r^2 ; b) krychle s hranami $\sqrt[3]{V}$, obsah povrchu $6\sqrt[3]{V^2}$; c) poloměr podstavy $\sqrt{2/3}r$, výška $\frac{2}{\sqrt{3}}r$, objem $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}r^3$; d) poloměr podstavy $\frac{\sqrt{2}}{2}r$, výška $\sqrt{2}r$, obsah pláště $2\pi r^2$;
4. a) na $(-\infty, -\frac{1}{2})$ a $\langle \frac{1}{2}, +\infty)$ konvexní, na $\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ konkávní, inflexe v $-\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{2}$; b) na $(-\infty, 1)$ konkávní, na $\langle 1, +\infty)$ konvexní, inflexe v 1 ; c) na $\mathbb{R}$ konvexní, body inflexe nemá; d) na $(-\infty, -2)$ konkávní, na $\langle -2, +\infty)$ konvexní, inflexe v -2 ; e) na $(-\infty, -3)$ a $\langle 1, +\infty)$ konvexní, na $\langle -3, 1)$ konkávní, inflexe v -3 a -1 ; f) na $\langle 0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi \rangle$ ($k \in \mathbb{Z}$) konkávní, na $\langle \pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi \rangle$ ($k \in \mathbb{Z}$) konvexní, inflexe v $k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$); g) na $(-\infty, -\sqrt{3})$ a $\langle 0, \sqrt{3})$ konkávní, na $\langle -\sqrt{3}, 0)$ a $\langle \sqrt{3}, +\infty)$ konvexní, inflexe v $\pm\sqrt{3}$ a 0 ; h) na $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ a $\langle 3, +\infty)$ konvexní, na $\langle 1, 3)$ konkávní, inflexe v 3 ; i) na $(-\infty, -3)$ konvexní, na $\langle -3, +\infty)$ konkávní, inflexe v -3 .
5. a) $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{2}{3}$ v $\pm\infty$; b) $x = -2$, $y = 0$ v $\pm\infty$; c) $x = -1$, $y = x - 3$ v $\pm\infty$; d) $x = 1$; e) $y = x$ v $+\infty$; f) nemá; g) $y = \frac{\pi}{4}$ v $\pm\infty$; h) $x = \pm 1$; i) $y = 0$ v $-\infty$; j) $x = -\frac{1}{2}\ln 3$, $y = 2x + \ln 3$ v $+\infty$.

Neurčitý integrál

1. Spočtěte (využijte linearitu a tabulkové integrály):

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int (x^3 - 2x^2 - 3) \, dx; & \text{b)} \int \frac{x^3 - x + 4}{x^2} \, dx; & \text{c)} \int \frac{2x - 5}{x^5} \, dx; \\ \text{d)} \int \sqrt[4]{x} \, dx; & \text{e)} \int \sqrt[5]{x^3} \, dx; & \text{f)} \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}; \\ \text{g)} \int (3e^x + 4 \sin x) \, dx; & \text{h)} \int 2 \cos x \, dx; & \text{i)} \int \frac{2x^2 + 5}{x^2 + 1} \, dx. \end{array}$$

2. Spočtěte (využijte lineární substitute):

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int (3x - 4)^6 \, dx; & \text{b)} \int \frac{dx}{3x - 1}; & \text{c)} \int \frac{dx}{(2x + 1)^5}; \\ \text{d)} \int \sqrt[4]{2 - x} \, dx; & \text{e)} \int 2 \cos 3x \, dx; & \text{f)} \int \left(3 \sin \frac{x}{3} - \cos \frac{x}{2}\right) \, dx; \\ \text{g)} \int (5e^{2x} + 3e^{-x}) \, dx; & \text{h)} \int (3^x + 3 \cdot 2^{-2x}) \, dx. \end{array}$$

3. Spočtěte (využijte vyjádření pomocí dvojnásobného argumentu):

$$\text{a)} \int \sin^2 x \, dx; \quad \text{b)} \int \cos^2 x \, dx.$$

4. Spočtěte (využijte metodu per partes):

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int (x - 2) \sin 2x \, dx; & \text{b)} \int (x + 1) \cos \frac{x}{3} \, dx; & \text{c)} \int (3x - 1) e^{3x} \, dx; \\ \text{d)} \int (x + \sqrt{x}) \ln x \, dx; & \text{e)} \int \frac{\ln x}{x^2} \, dx; & \text{f)} \int (x^2 - x) \sin \frac{x}{2} \, dx; \\ \text{g)} \int (x^2 + x + 1) e^{-x} \, dx; & \text{h)} \int \ln^2 x \, dx; & \text{i)} \int x \ln^3 x \, dx. \end{array}$$

5. Spočtěte (využijte metodu per partes a řešte rovnici):

$$\text{a)} \int e^{2x} \cos \frac{x}{3} \, dx; \quad \text{b)} \int e^{-x} \sin 2x \, dx; \quad \text{c)} \int \frac{\ln x}{x} \, dx.$$

6. Spočtěte pomocí vhodné substitute:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int \frac{x + 1}{x^2 + 2x + 4} \, dx; & \text{b)} \int \frac{2x^2}{x^3 - 1} \, dx; & \text{c)} \int \cotg 2x \, dx; \\ \text{d)} \int 2x (x^2 - 1)^4 \, dx; & \text{e)} \int x e^{x^2 + 1} \, dx; & \text{f)} \int x \sqrt{1 - x^2} \, dx; \\ \text{g)} \int 6x^2 \sqrt{1 + x^3} \, dx; & \text{h)} \int \frac{x^2}{\sqrt{x^3 + 8}} \, dx; & \text{i)} \int \frac{4x + 4}{\sqrt[3]{x^2 + 2x + 2}} \, dx; \\ \text{j)} \int \sin^7 x \cdot \cos x \, dx; & \text{k)} \int \sin x \cdot \cos^4 x \, dx; & \text{l)} \int \frac{\ln^3 x}{x} \, dx. \end{array}$$

Výsledky

1. a) $\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - 3x + c, x \in \mathbb{R}$; b) $\frac{1}{2}x^2 - \ln|x| - \frac{4}{x} + c, x \in (-\infty, 0), x \in (0, +\infty)$;
c) $-\frac{2}{3x^3} + \frac{5}{4x^4} + c, x \in (-\infty, 0), x \in (0, +\infty)$; d) $\frac{4}{5}\sqrt[4]{x^5} + c, x \in (0, +\infty)$; e) $\frac{5}{8}\sqrt[5]{x^8} + c, x \in \mathbb{R}$;
f) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + c, x \in (-\infty, 0), x \in (0, +\infty)$; g) $3e^x - 4\cos x + c, x \in \mathbb{R}$;
h) $-2\sin x + c, x \in \mathbb{R}$; i) $2x + 3\operatorname{arctg} x + c, x \in \mathbb{R}$.
2. a) $\frac{1}{21}(3x - 4)^7 + c, x \in \mathbb{R}$; b) $\frac{1}{3}\ln|3x - 1| + c, x \in (-\infty, \frac{1}{3}), x \in (\frac{1}{3}, +\infty)$;
c) $\frac{-1}{8(2x+1)^4} + c, x \in (-\infty, -\frac{1}{2}), x \in (\frac{1}{2}, +\infty)$; d) $-\frac{4}{5}\sqrt[4]{(2-x)^5} + c, x \in (-\infty, 2)$;
e) $\frac{2}{3}\sin 3x + c, x \in \mathbb{R}$; f) $-9\cos \frac{x}{3} - 2\sin \frac{x}{2} + c, x \in \mathbb{R}$; g) $\frac{5}{2}e^{2x} - 3e^{-x} + c, x \in \mathbb{R}$;
h) $\frac{1}{\ln 3}3^x - \frac{3}{2\ln 2}2^{-2x} + c, x \in \mathbb{R}$.
3. a) $\frac{1}{2}(x - \frac{1}{2}\sin 2x) + c, x \in \mathbb{R}$; b) $\frac{1}{2}(x + \frac{1}{2}\sin 2x) + c, x \in \mathbb{R}$.
4. a) $-\frac{1}{2}(x - 2)\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + c, x \in \mathbb{R}$; b) $3(x + 1)\sin \frac{x}{3} + 9\cos \frac{x}{3} + c, x \in \mathbb{R}$;
c) $\frac{1}{3}(3x - 2)e^{3x} + c, x \in \mathbb{R}$; d) $(\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}\sqrt{x^3})\ln x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{4}{9}\sqrt{x^3} + c, x \in (0, +\infty)$;
e) $-\frac{1}{x}(\ln x + 1) + c, x \in (0, +\infty)$; f) $-2(x^2 - x - 8)\cos \frac{x}{2} + 4(2x - 1)\sin \frac{x}{2} + c, x \in \mathbb{R}$;
g) $-(x^2 + 3x + 4)e^{-x} + c, x \in \mathbb{R}$; h) $x(\ln^2 x - 2\ln x + 2) + c, x \in (0, +\infty)$;
i) $x^2(\frac{1}{2}\ln^3 x - \frac{3}{4}\ln^2 x + \frac{3}{4}\ln x - \frac{3}{8}) + c, x \in (0, +\infty)$.
5. a) $\frac{3}{37}(\sin \frac{x}{3} + 6\cos \frac{x}{3})e^{2x} + c, x \in \mathbb{R}$; b) $-\frac{1}{5}(\sin 2x + 2\cos 2x)e^{-x} + c, x \in \mathbb{R}$;
c) $\frac{1}{2}\ln^2 x + c, x \in (0, +\infty)$.
6. a) $\frac{1}{2}\ln(x^2 + 2x + 4) + c, x \in \mathbb{R}$; b) $\frac{2}{3}\ln|x^3 - 1| + c, x \in (-\infty, 1), x \in (1, +\infty)$;
c) $\frac{1}{2}\ln|\sin 2x| + c, x \in (0 + k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2}), k \in \mathbb{Z}$; d) $\frac{1}{5}(x^2 - 1)^5 + c, x \in \mathbb{R}$;
e) $\frac{1}{2}e^{x^2+1} + c, x \in \mathbb{R}$; f) $-\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3} + c, x \in (-1, 1)$; g) $\frac{4}{3}\sqrt{(x^3+1)^3} + c, x \in (-1, +\infty)$;
h) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3+8} + c, x \in (-2, +\infty)$; i) $3\sqrt[3]{(x^2+2x+2)^2} + c, x \in \mathbb{R}$;
j) $\frac{1}{8}\sin^8 x + c, x \in \mathbb{R}$; k) $-\frac{1}{5}\cos^5 x + c, x \in \mathbb{R}$; l) $\frac{1}{4}\ln^4 x + c, x \in (0, +\infty)$.

Integrace racionálních funkcí a dalších typů funkcí

1. Spočtete:

a) $\int \frac{x^3 - 2x + 5}{x^2 - x - 2} dx;$

b) $\int \frac{2x + 1}{(x - 1)(x^2 + 3x + 2)} dx;$

c) $\int \frac{x^2 + 7x + 1}{(x - 1)(x^2 + x - 2)} dx;$

d) $\int \frac{dx}{(x + 2)(x^2 + 4x + 4)};$

e) $\int \frac{3x - 2}{x^4 - x^3} dx;$

f) $\int \frac{x^4 + x^3 + 11x^2 - 7x}{(x + 1)^3(x^2 - 4x + 4)} dx;$

g) $\int \frac{-5}{(x + 4)^4} dx;$

h) $\int \frac{3}{(2x - 1)^3} dx.$

2. Spočtete:

a) $\int \frac{x + 3}{x^2 + 2x + 10} dx;$

b) $\int \frac{5x - 2}{x^2 - 2x + 5} dx;$

c) $\int \frac{3x + 4}{x^2 + 4x + 13} dx;$

d) $\int \frac{x}{x^2 - 6x + 13} dx;$

e) $\int \frac{dx}{4x^2 - 12x + 13};$

f) $\int \frac{dx}{x(x^2 + 1)}.$

3. Spočtete:

a) $\int \frac{3e^{2x}}{e^{4x} + e^{2x} - 2} dx;$

b) $\int \frac{2}{e^{3x} + 2} dx;$

c) $\int \frac{e^{2x}}{e^{4x} - 2e^{2x} + 2} dx;$

d) $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}};$

e) $\int \frac{\ln x}{x(\ln^2 x - 4)} dx;$

f) $\int \frac{dx}{x \ln x}.$

4. Spočtete:

a) $\int \sin^6 x \cdot \cos^3 x dx;$

b) $\int \sin^3 x \cdot \cos^5 x dx;$

c) $\int \frac{\cos x}{\cos^2 x - \sin x + 1} dx;$

d) $\int \frac{1 - \cos x}{(1 + \cos x) \sin x} dx;$

e) $\int \operatorname{tg}^4 x dx;$

f) $\int \frac{1 - \sin x}{1 + \cos x} dx;$

g) $\int \operatorname{cotg}^2 x dx;$

h) $\int \frac{dx}{1 - \cos x}.$

5. Spočtete:

a) $\int x \sqrt[3]{x - 1} dx;$

b) $\int \frac{x - 1}{\sqrt{2x + 1}} dx;$

c) $\int \frac{dx}{2 + \sqrt{x + 1}};$

d) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x + 1}};$

e) $\int \frac{\sqrt{x - 4}}{x} dx;$

f) $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}.$

6. Spočtete:

a) $\int \sqrt{-x^2 + 6x - 8} dx;$

b) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x}};$

c) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x + 10}}.$

Výsledky

1. a) $\frac{1}{2}x^2 + x + \ln \frac{|x-2|^3}{(x+1)^2} + c, x \in (-\infty, -1), x \in (-1, 2), x \in (2, +\infty);$
b) $\frac{1}{2} \ln \frac{|x^2-1|}{(x+2)^2} + c, x \in (-\infty, -2), x \in (-2, -1), x \in (-1, 1), x \in (1, +\infty);$
c) $-\frac{3}{(x-1)} + \ln \frac{(x-1)^2}{|x+2|} + c, x \in (-\infty, -2), x \in (-2, 1), x \in (1, +\infty);$
d) $-\frac{1}{2(x+2)^2} + c, x \in (-\infty, -2), x \in (-2, +\infty);$
e) $-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \ln \left| \frac{x-1}{x} \right| + c, x \in (-\infty, 0), x \in (0, 1), x \in (1, +\infty);$
f) $-\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{2}{(x+1)} - \frac{2}{x-2} + \ln |x-2| + c, x \in (-\infty, -1), x \in (-1, 2), x \in (2, +\infty);$
g) $\frac{5}{3(x+4)^3} + c, x \in (-\infty, -4), x \in (-4, +\infty);$
h) $\frac{-3}{4(2x-1)^2} + c, x \in (-\infty, \frac{1}{2}), x \in (\frac{1}{2}, +\infty).$
2. a) $\frac{1}{2} \ln(x^2+2x+10) + \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{3} + c, x \in \mathbb{R};$ b) $\frac{5}{2} \ln(x^2-2x+5) + \frac{3}{2} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{2} + c, x \in \mathbb{R};$
c) $\frac{3}{2} \ln(x^2+4x+13) - \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{3} + c, x \in \mathbb{R};$ d) $\frac{1}{2} \ln(x^2-6x+13) + \frac{3}{2} \operatorname{arctg} \frac{x-3}{2} + c, x \in \mathbb{R};$ e) $\frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{2x-3}{2} + c, x \in \mathbb{R};$ f) $\frac{1}{2} \ln \frac{x^2}{x^2+1} + c, x \in (-\infty, 0), x \in (0, +\infty).$
3. a) $\frac{1}{2} \ln \frac{|e^{2x}-1|}{e^{2x}+2} + c, x \in (-\infty, 0), x \in (0, +\infty);$
b) $x - \frac{1}{3} \ln(e^{3x}+2) + c, x \in \mathbb{R};$
c) $\frac{1}{2} \operatorname{arctg}(e^{2x}-1) + c, x \in \mathbb{R};$
d) $\operatorname{arctg} e^x + c, x \in \mathbb{R};$
e) $\frac{1}{2} \ln |\ln^2 x - 4| + c, x \in (0, e^{-2}), x \in (e^{-2}, e^2), x \in (e^2, +\infty);$
f) $\ln |\ln x| + c, x \in (0, 1), x \in (1, +\infty).$
4. a) $\frac{1}{7} \sin^7 x - \frac{1}{9} \sin^9 x + c, x \in \mathbb{R};$
b) $\frac{1}{8} \cos^8 x - \frac{1}{6} \cos^6 x + c, x \in \mathbb{R};$
c) $\frac{1}{3} \ln \frac{2+\sin x}{1-\sin x} + c, x \in (-\frac{3}{2}\pi + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi), k \in \mathbb{Z};$
d) $\frac{1}{1+\cos x} + c, x \in (0 + k\pi, \pi + k\pi), k \in \mathbb{Z};$
e) $\frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x + c, x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi), k \in \mathbb{Z};$
f) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} - \ln(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}) + c, x \in (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi), k \in \mathbb{Z};$
g) $-\cotg x - x + c, x \in (0 + k\pi, \pi + k\pi), k \in \mathbb{Z};$
h) $-\cotg \frac{x}{2} + c, x \in (0 + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}.$
5. a) $\frac{3}{7} \sqrt[3]{(x-1)^7} + \frac{3}{4} \sqrt[3]{(x-1)^4} + c, x \in \mathbb{R};$ b) $\frac{1}{6} \sqrt{(2x+1)^3} - \frac{3}{2} \sqrt{(2x+1)} + c, x \in (-\frac{1}{2}, +\infty);$ c) $2\sqrt{x+1} - 4 \ln(2 + \sqrt{x+1}) + c, x \in (-1, +\infty);$ d) $\ln \frac{|\sqrt{x+1}-1|}{\sqrt{x+1}+1} + c, x \in (-1, 0), x \in (0, +\infty);$ e) $2\sqrt{x-4} - 4 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x-4}}{2} + c, x \in (4, +\infty);$
f) $2\sqrt{x} - 3 \sqrt[3]{x} + 6 \sqrt[6]{x} - 6 \ln(\sqrt[6]{x} + 1) + c, x \in (0, +\infty).$
6. a) $\frac{1}{2} \arcsin(x-3) + \frac{1}{2} (x-3) \sqrt{-x^2+6x-8} + c, x \in (2, 4);$ b) $\ln |\sqrt{x^2+4x} + x + 2| + c, x \in (-\infty, -4), x \in (0, +\infty);$ c) $\ln(\sqrt{x^2-2x+10} + x - 1) + c, x \in \mathbb{R}.$

Určitý integrál

1. Spočtete:

a) $\int_0^2 (3x^2 - 2x) \, dx;$	b) $\int_1^2 \frac{dx}{x^2};$	c) $\int_1^e \frac{dx}{x};$
d) $\int_2^6 \frac{dx}{x};$	e) $\int_1^4 \sqrt{x} \, dx;$	f) $\int_{-7}^0 \frac{2}{\sqrt[3]{x-1}} \, dx;$
g) $\int_0^\pi \sin 6x \, dx;$	h) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \frac{x}{2} \, dx;$	i) $\int_0^1 3^x \, dx.$

2. Spočtete:

a) $\int_0^2 x-1 \, dx;$	b) $\int_{-2}^3 x^2-1 \, dx;$	c) $\int_2^4 e^{ 2x-6 } \, dx.$
----------------------------	---------------------------------	---------------------------------

3. Spočtete:

a) $\int_0^\pi (2x+1) \sin \frac{x}{2} \, dx;$	b) $\int_0^\pi (4x-1) \cos 2x \, dx;$	c) $\int_{-1}^0 (3x+2) e^{3x} \, dx;$
d) $\int_0^\pi x^2 \cos x \, dx;$	e) $\int_{-1}^0 x^3 e^{-x} \, dx;$	f) $\int_0^1 x \operatorname{arctg} x \, dx.$

4. Spočtete:

a) $\int_{-2}^{-1} \frac{x+1}{x^2(x-1)} \, dx;$	b) $\int_0^1 \frac{x^2+3x}{(x+1)(x^2+1)} \, dx;$
c) $\int_{-2}^3 \frac{2x^3-3x^2-20x-14}{x^2-x-12} \, dx;$	d) $\int_3^4 \frac{x^2-2x-4}{x^3-4x^2+4x} \, dx;$
e) $\int_3^5 \frac{x-2}{x^2-6x+13} \, dx;$	f) $\int_0^1 \frac{dx}{4x^2+4x+5}.$

5. Spočtete:

a) $\int_1^3 \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}} \, dx;$	b) $\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}} \, dx;$	c) $\int_0^\pi \operatorname{tg} \frac{x}{3} \, dx.$
--	---	--

6. Spočtete:

a) $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x-1}{e^x+1} \, dx;$	b) $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cdot \cos x \, dx;$
c) $\int_{\pi/2}^{2\pi} \frac{\sin x}{\cos^2 x - 2 \cos x + 2} \, dx;$	d) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \, dx;$
e) $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}.$	

Výsledky

1. a) 4; b) $\frac{1}{2}$; c) 1; d) $\ln 3$; e) $\frac{14}{3}$; f) -9 ; g) 0; h) $2\sqrt{2}$; i) $\frac{2}{\ln 3}$.
2. a) 1; b) $\frac{28}{3}$; c) $e^2 - 1$.
3. a) 10; b) 0; c) $(1 + 2e^{-3})/3$; d) -2π ; e) $2e - 6$; f) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.
4. a) $2\ln \frac{4}{3} - \frac{1}{2}$; b) $\frac{\pi}{4}$; c) $7\ln 6$; d) $\ln 3 - 1$; e) $\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{8}$; f) $\frac{1}{4}\arctg \frac{3}{2} - \frac{1}{4}\arctg \frac{1}{2}$.
5. a) 3; b) $\frac{4}{3}$; c) $3\ln 2$.
6. a) $\ln \frac{9}{8}$; b) $\frac{1}{3}$; c) $-\frac{1}{4}\pi$; d) $2\ln 2 - 1$; e) $2 - \ln 2$.

Nevlastní integrál

1. Spočtěte:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^3}; & \text{b)} \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{(x-1)^4}; & \text{c)} \int_{-8}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}; \\ \text{d)} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}}; & \text{e)} \int_0^{+\infty} \sin x \, dx; & \text{f)} \int_{-\infty}^0 e^x \, dx; \\ \text{g)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+1}{x^2-4x+5} \, dx. \end{array}$$

2. Spočtěte:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int_{1/2}^{+\infty} x e^{-2x} \, dx; & \text{b)} \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} \, dx; & \text{c)} \int_0^{+\infty} x^4 e^{-x} \, dx; \\ \text{d)} \int_1^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{x^2} \, dx; & \text{e)} \int_0^{+\infty} e^{-2x} \cos 3x \, dx; & \text{f)} \int_0^{+\infty} e^{-2x} \sin 3x \, dx. \end{array}$$

3. Spočtěte:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-2x+3}; & \text{b)} \int_1^{+\infty} \frac{2x+5}{x^2+2x+5} \, dx; \\ \text{c)} \int_{-\infty}^{-2} \frac{dx}{x^2-2x-3}; & \text{d)} \int_0^{+\infty} \frac{x+4}{(x+1)(x^2+3x+2)} \, dx. \end{array}$$

4. Spočtěte:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^{2x}+4e^x+3}; & \text{b)} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x+e^{-x}}; \\ \text{c)} \int_0^e \frac{dx}{x(\ln^2 x+2\ln x+5)}; & \text{d)} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln^2 x+3\ln x+2)}; \\ \text{e)} \int_3^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}; & \text{f)} \int_6^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x+3}}. \end{array}$$

Výsledky

1. a) $\frac{1}{8}$; b) $\frac{1}{3}$; c) -6 ; d) $+\infty$; e) neexistuje; f) 1 ; g) neexistuje.
2. a) $\frac{1}{2e}$; b) 1 ; c) 24 ; d) 2 ; e) $\frac{2}{13}$; f) $\frac{3}{13}$.
3. a) $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$; b) $+\infty$; c) $\frac{1}{4}\ln 5$; d) $3 - 2\ln 2$.
4. a) $\frac{1}{6}\ln 2$; b) $\frac{1}{4}\pi$; c) $\frac{3}{8}\pi$; d) $\ln 2$; e) $\frac{1}{3}\pi$; f) $\frac{1}{2}\ln 5$.

Aplikace určitého integrálu

1. Spočítejte střední hodnotu funkce f na daném intervalu:
 - a) $f(x) = 3x$, $x \in \langle -1, 1 \rangle$;
 - b) $f(x) = x^2$, $x \in \langle 0, 1 \rangle$;
 - c) $f(x) = e^x$, $x \in \langle 0, 2 \rangle$;
 - d) $f(x) = \sin x$, $x \in \langle 0, \pi \rangle$.
2. Spočítejte obsahy následujících množin:
 - a) $\{[x, y] : x \in \langle 0, \pi \rangle, 0 \leq y \leq \sin x\}$ (plocha pod obloukem sinusoidy);
 - b) $\{[x, y] : x \in \langle 1, e \rangle, 0 \leq y \leq 1/x\}$;
 - c) $\{[x, y] : x \in \langle a, b \rangle, 0 \leq y \leq x^2\}$;
 - d) $\{[x, y] : x \in \mathbb{R}, 0 \leq y \leq e^{-|x|}\}$;
 - e) $\{[x, y] : x \in \mathbb{R}, 0 \leq y \leq 1/(x^2 + 1)\}$.
3. Spočítejte obsah omezené plochy ohraničené grafy funkcí f, g :
 - a) $f(x) = 0$, $g(x) = x^2 - 2x$;
 - b) $f(x) = x$, $g(x) = x^4$;
 - c) $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$.
4. Spočítejte obsah elipsy s poloosami a, b . (Nápověda: rovnice elipsy je $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$.)
5. Spočítejte délku grafu funkce f na daném intervalu:
 - a) $f(x) = a \cosh \frac{x}{a}$ ($a > 0$), $x \in \langle 0, b \rangle$ ($b > 0$);
 - b) $f(x) = \ln(x^2 - 1)$, $x \in \langle 2, 5 \rangle$;
 - c) $f(x) = \ln \sin x$, $x \in \langle \frac{1}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi \rangle$;
 - d) $f(x) = \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$, $x \in \langle -1, 1 \rangle$.
6. Spočítejte objem rotačního elipsoidu, vzniklého rotací elipsy s poloosami a, b kolem její osy délky $2a$. (Nápověda: použijte rovnici elipsy $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$.)
7. Spočítejte objem rotačního paraboloidu, který má výšku v a poloměr podstavy r .
8. Spočítejte povrch pláště kulového pásu s výškou v v kouli o poloměru r .
9. Spočítejte povrch anuloidu, který vznikne rotací kružnice o poloměru r se středem $[0, R]$ ($R > r$) kolem osy x .
10. Určete těžiště půlkružnice.
11. Určete těžiště plochy pod jedním obloukem sinusoidy.

Výsledky

1. a) 0; b) $\frac{1}{3}$; c) $\frac{1}{2}(e^2 - 1)$; d) $\frac{2}{\pi}$.
2. a) 2; b) 1; c) $(b^3 - a^3)/3$; d) 2; e) π .
3. a) $\frac{4}{3}$ (interval $\langle 0, 2 \rangle$); b) $\frac{3}{10}$ (interval $\langle 0, 1 \rangle$); c) $\frac{1}{3}$ (interval $\langle 0, 1 \rangle$).
4. πab (čtyřikrát obsah pod grafem funkce $b\sqrt{1 - (x/a)^2}$, použije se například substituce $x = a \sin t$).
5. a) $a \sinh \frac{b}{a}$; b) $3 + \ln 2$; c) $\ln 3$; d) 4.
6. $\frac{4}{3} \pi ab^2$.
7. $\frac{1}{2} \pi r^2 v$ (funkce $f(x) = r\sqrt{x/v}$ na intervalu $\langle 0, v \rangle$).
8. $2\pi r v$ (nezávisí na jeho poloze v kouli).
9. $4\pi^2 R r$ (sečtením integrálů funkcí $R \pm \sqrt{r^2 - x^2}$ na $\langle -r, r \rangle$ dostaneme $4\pi r \int_{-r}^r 1/\sqrt{r^2 - x^2} \, dx = 4\pi r R [\arcsin \frac{x}{r}]_{-r}^r$).
10. $[0, \frac{2}{\pi} r]$ pro $\sqrt{r^2 - x^2}$ na intervalu $\langle -r, r \rangle$.
11. $[\frac{1}{2} \pi, \frac{1}{8} \pi]$ pro $\sin x$ na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$.

Separovatelné diferenciální rovnice

1. Řešte diferenciální rovnici s počáteční podmínkou

$$x' = \frac{e^{-x}}{t}, \quad x(1) = 0.$$

2. Řešte diferenciální rovnici $x' = x^{-2}$ s počáteční podmínkou:

$$\text{a) } x(1) = 1; \quad \text{b) } x(-2) = 1; \quad \text{c) } x(-2) = -2.$$

3. Řešte diferenciální rovnici $x' = -t/x$ s počáteční podmínkou:

$$\text{a) } x(1) = 1; \quad \text{b) } x(4) = -3.$$

4. Řešte diferenciální rovnici $x' = -x^2$ s počáteční podmínkou:

$$\text{a) } x(-1) = 0; \quad \text{b) } x(1) = 3; \quad \text{c) } x(-2) = -1.$$

5. Řešte diferenciální rovnici $x' = (x^2 - x)/t$ s počáteční podmínkou:

$$\text{a) } x(1) = 2; \quad \text{b) } x(-2) = 1; \quad \text{c) } x(1) = \frac{3}{4}; \quad \text{d) } x(3) = 0; \quad \text{e) } x(1) = -1.$$

6. Řešte diferenciální rovnici $x' = (1 - x^2)/(2tx)$ s počáteční podmínkou:

$$\text{a) } x(1) = \frac{1}{2}; \quad \text{b) } x(-2) = 1; \quad \text{c) } x(2) = 2; \quad \text{d) } x(3) = -2; \quad \text{e) } x(-3) = -\frac{2}{3}.$$

7. Řešte diferenciální rovnici $x' = 2\sqrt{x}$ s počáteční podmínkou:

$$\text{a) } x(0) = 1; \quad \text{b) } x(0) = 0.$$

Výsledky

1. $x(t) = \ln(1 + \ln t)$, $t \in (\frac{1}{e}, +\infty)$; obecné řešení je $x(t) = \ln \ln ct$ pro $c \neq 0$ na intervalu $(-\infty, \frac{1}{c})$ pro $c < 0$, $(\frac{1}{c}, +\infty)$ pro $c > 0$.
2. Obecné řešení $x(t) = \sqrt[3]{3(t-c)}$ na intervalech $(-\infty, c)$ a $(c, +\infty)$; a) $x(t) = \sqrt[3]{3t-2}$, $t \in (\frac{2}{3}, +\infty)$; b) $x(t) = \sqrt[3]{3t+7}$, $t \in (-\frac{7}{3}, +\infty)$; c) $x(t) = \sqrt[3]{3t-2}$, $t \in (-\infty, \frac{2}{3})$.
3. Obecné řešení $x(t) = \sqrt{c^2 - t^2}$, $x(t) = -\sqrt{c^2 - t^2}$, $t \in (-c, c)$ pro $c > 0$; a) $x(t) = \sqrt{2 - t^2}$, $t \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$; b) $x(t) = -\sqrt{25 - t^2}$, $t \in (-5, 5)$.
4. Stacionární řešení $x(t) = 0$ na intervalu $\mathbb{R}$, nestacionární řešení $x(t) = \frac{1}{t-c}$ na intervalech $(-\infty, c)$ a $(c, +\infty)$; a) $x(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$; b) $x(t) = \frac{3}{3t-2}$, $t \in (\frac{2}{3}, +\infty)$; c) $x(t) = \frac{1}{t+1}$, $t \in (-\infty, -1)$.
5. Stacionární řešení $x(t) = 0$, $x(t) = 1$ na intervalech $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$; nestacionární řešení $x(t) = \frac{1}{1-ct}$ pro $c \neq 0$ na maximálních intervalech neobsahujících $0, \frac{1}{c}$; a) $x(t) = \frac{2}{2-t}$, $t \in (0, 2)$; b) $x(t) = 1$, $t \in (-\infty, 0)$; c) $x(t) = \frac{3}{3+t}$, $t \in (0, +\infty)$; d) $x(t) = 0$, $t \in (0, +\infty)$; e) $x(t) = \frac{1}{1-2t}$, $t \in (\frac{1}{2}, +\infty)$.
6. Stacionární řešení $x(t) = 1$, $x(t) = -1$ na intervalech $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$; nestacionární řešení $x(t) = \sqrt{1 - c/t}$ a $x(t) = -\sqrt{1 - c/t}$ na maximálních intervalech disjunktních s intervalem obsahujícím $0, c$; a) $x(t) = \sqrt{1 - 3/(4t)}$, $t \in (\frac{3}{4}, +\infty)$; b) $x(t) = 1$, $t \in (-\infty, 0)$; c) $x(t) = \sqrt{1 + 6/t}$, $t \in (0, +\infty)$; d) $x(t) = -\sqrt{1 + 9/t}$, $t \in (0, +\infty)$; e) $x(t) = -\sqrt{1 + 5/(3t)}$, $t \in (-\infty, -\frac{5}{3})$.
7. Stacionární řešení $x(t) = 0$ na intervalu $\mathbb{R}$, nestacionární řešení $x(t) = (t-c)^2$ na intervalech $(c, +\infty)$, dají se prodloužit stacionárním řešením na $\mathbb{R}$;

$$\text{a) } x(t) = \begin{cases} 0, & t \in (-\infty, -1), \\ (t+1)^2, & t \in (-1, +\infty); \end{cases}$$

$$\text{b) } x(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \text{nebo} \quad x(t) = \begin{cases} 0, & t \in (-\infty, c), \\ (t-c)^2, & t \in (c, +\infty), \end{cases} \quad (c \geq 0).$$

Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

1. Řešte diferenciální rovnici s počáteční podmínkou:

a) $x' = \frac{2tx}{t^2 - 1}$, $x(3) = 4$;

b) $x' = \frac{x+2}{t}$, $x(2) = 4$;

c) $x' = \frac{2x+4}{t}$, $x(1) = 3$;

d) $x' = -\frac{x}{t+1}$, $x(1) = 2$;

e) $x' = -\frac{3x+3}{t}$, $x(1) = 0$;

f) $x' = (x-1)\cos t$, $x(\pi) = 0$;

g) $x' = -2t(x+1)$, $x(0) = 2$;

h) $x' = (x-1)\cotg t$, $x(\frac{\pi}{2}) = 3$;

i) $x' = -\frac{tx}{t+1}$, $x(0) = 2$;

j) $x' = \frac{tx}{t+1}$, $x(0) = 1$.

2. Řešte diferenciální rovnici s počáteční podmínkou:

a) $x' = \frac{1}{t}x + \frac{1}{t^3}$, $x(1) = 1$;

b) $x' = -\frac{1}{t}x + \frac{1}{t^2}$, $x(1) = 2$;

c) $x' = \frac{2}{t}x + t^2 \sin t$, $x(\pi) = 0$;

d) $x' = -\frac{2}{t}x + 4t$, $x(2) = 5$;

e) $x' = \frac{3}{t}x - t^3 e^t$, $x(1) = 0$;

f) $x' = -\frac{3}{t}x + \frac{2}{t^2}$, $x(1) = 3$;

g) $x' = 2tx - e^{t^2}$, $x(0) = 2$;

h) $x' = -x \operatorname{tg} t + \cos t$, $x(0) = 1$;

i) $x' = \frac{1}{t+1}x + 1$, $x(0) = -1$;

j) $x' = \frac{-2t}{t^2+1}x + \frac{1}{t^2+1}$, $x(1) = 0$.

Výsledky

1. Jedná se o lineární diferenciální rovnice, všechny lze řešit separací.
 - a) $x(t) = \frac{1}{2}(t^2 - 1)$, $t \in (1, +\infty)$ (obecné řešení $x(t) = c(t^2 - 1)$);
 - b) $x(t) = 3t - 2$, $t \in (0, +\infty)$ (obecné řešení $x(t) = ct - 2$);
 - c) $x(t) = 5t^2 - 2$, $t \in (0, +\infty)$ (obecné řešení $x(t) = ct^2 - 2$);
 - d) $x(t) = \frac{4}{t+1}$, $t \in (-1, +\infty)$ (obecné řešení $x(t) = \frac{c}{t+1}$);
 - e) $x(t) = t^{-3} - 1$, $t \in (0, +\infty)$ (obecné řešení $x(t) = ct^{-3} - 1$);
 - f) $x(t) = 1 - e^{\sin t}$, $t \in \mathbb{R}$ (obecné řešení $x(t) = ce^{\sin t} + 1$);
 - g) $x(t) = 3e^{-t^2} - 1$, $t \in \mathbb{R}$ (obecné řešení $x(t) = ce^{-t^2} - 1$);
 - h) $x(t) = 2 \sin t + 1$, $t \in (0, \pi)$ (obecné řešení $x(t) = c \sin t + 1$);
 - i) $x(t) = 2(t+1)e^{-t}$, $t \in \mathbb{R}$ (obecné řešení $x(t) = c(t+1)e^{-t}$);
 - j) $x(t) = \frac{e^t}{t+1}$, $t \in (-1, +\infty)$ (obecné řešení $x(t) = \frac{ce^t}{t+1}$).
2.
 - a) $x(t) = \frac{4}{3}t - \frac{1}{3}t^{-2}$, $t \in (0, +\infty)$ (obecné řešení $x(t) = ct - \frac{1}{3}t^{-2}$);
 - b) $x(t) = (\ln t + 2)t^{-1}$, $t \in (0, +\infty)$ (obecné řešení $x(t) = \frac{c}{t} + \frac{1}{t} \ln |t|$);
 - c) $x(t) = -(1 + \cos t)t^2$, $t \in (0, +\infty)$ (obecné řešení $x(t) = ct^2 - t^2 \cos t$);
 - d) $x(t) = 4t^{-2} + t^2$, $t \in (0, +\infty)$ (obecné řešení $x(t) = ct^{-2} + t^2$);
 - e) $x(t) = t^3(e - e^t)$, $t \in (0, +\infty)$ (obecné řešení $x(t) = ct^3 - t^3 e^t$);
 - f) $x(t) = 2t^{-3} + t^{-1}$, $t \in (0, +\infty)$ (obecné řešení $x(t) = ct^{-3} + t^{-1}$);
 - g) $x(t) = (2 - t)e^{t^2}$, $t \in \mathbb{R}$ (obecné řešení $x(t) = ce^{t^2} - te^{t^2}$);
 - h) $x(t) = (t + 1) \cos t$, $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ (obecné řešení $x(t) = c \cos t + t \cos t$);
 - i) $x(t) = (t+1)(\ln(t+1) - 1)$, $t \in (-1, +\infty)$ (obecné řešení $x(t) = c(t+1) + (t+1) \ln |t+1|$);
 - j) $x(t) = \frac{t-1}{t^2+1}$, $t \in \mathbb{R}$ (obecné řešení $x(t) = \frac{c}{t^2+1} + \frac{t}{t^2+1}$).