DEF Číslo h je horní mez $M \subset \mathbb{R}$, pokud $M \leq h$ $(x \leq h, \forall x \in M)$
Číslo d je dolní mez $M \subset \mathbb{R}$, pokud $M \geq d$ $(x \geq d, \forall x \in M)$

DEF Množina $M \subset \mathbb{R}$ je shora omezená, pokud má horní mez
zdola omezená, pokud má dolní mez
omezená, pokud má horní i dolní mez

DEF maximum $M \subset \mathbb{R}$ $(\max M)$ je největší prvek M (pokud existuje)
minimum $M \subset \mathbb{R}$ $(\min M)$ je nejmenší prvek M (pokud existuje)
supremum $M \subset \mathbb{R}$ $(\sup M)$ je { $+\infty$ pro shora neomezenou M
nejmenší horní mez pro shora omezenou M
infinum $M \subset \mathbb{R}$ $(\inf M$ je { $-\infty$ pro zdola neomezenou M
největší dolní mez pro zdola omezenou M

Věta každá (neprázdná) množina reálných čísel
má supremum i infinum

DEF (Reálná) funkce (reálné proměnné) je zobrazení
$f: A \to \mathbb{R}$, kde $A \subset \mathbb{R}$ je neprázdná
A... definiční obor zobrazení $\equiv D(f)$
$f(A) = \{f(x) : x \in A\}$... obor hodnot f .... $\mathcal{R}(f)$
graf funkce: $\{[x, f(x)] : x \in A\}$

DEF Funkce $f: A \to B$ je prostá, pokud $f(x) \neq f(y)$
pro $x \neq y$; $x, y \in D(f)$

na, pokud $B = f(A)$ ... $f: A \xrightarrow{na} B$

Skládání funkcí $f: A \to B$, $g: B \to C$ $A, B, C \in \mathbb{R}$
pak $g \circ f : A \to C$ i $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

DEF: Funkce $g: \mathcal{R}(f) \to A$ je inverzní k $f: A \to B$, pokud
$(g \circ f)(x) = x$, pro každé $x \in A$

Věta: Funkce $f: A \xrightarrow{na} B$ má inverzní funkci právě tehdy, když je (funkce f) prostá. Pak $\mathcal{R}(f_{-1}) = A$ a f je inverzní k f_{-1}, graf f_{-1} je symetrický s grafem f podle přímky $p: y = x$

DEF: Funkce je [zdola | shora] omezená na $A \subset D(f)$ pokud je [zdola | shora] omezená $f(A)$

DEF: Funkce f je

rostoucí na $A \subset D(f)$, pokud $f(x) < f(y)$ pro $x, y \in A$, $x < y$

klesající na $A \subset D(f)$, pokud $f(x) > f(y)$ pro $x, y \in A$, $x < y$

neklesající na $A \subset D(f)$, pokud $f(x) \leq f(y)$ pro $x, y \in A$, $x < y$

nerostoucí na $A \subset D(f)$, pokud $f(x) \geq f(y)$ pro $x, y \in A$, $x < y$

DEF: Funkce je monotónní, pokud je rostoucí, klesající, neklesající nebo nerostoucí, ryze pro ostrou nerovnost

Věta: Rostoucí (klesající) funkce je prostá, má tedy inverzní funkci, která je rostoucí (klesající).

DEF Funkce f se nazývá

sudá, pokud $f(-x) = f(x)$ pro každé $x \in D(f)$

lichá, pokud $f(-x) = -f(x)$ pro každé $x \in D(f)$

DEF Funkce f je periodická s periodou $T > 0$, pokud $f(x \pm T) = f(x)$ pro každé $x \in D(f)$

DEF) Okolí bodu o poloměru r : $U(x, r) = (x - r, x + r)$

Prstencové okolí bodu o poloměru r : $P(x, r) = U(x, r) \setminus \{x\}$

Okolí nevlastních bodů o poloměru r $\quad U(+\infty, r) = P(+\infty, r) = (r, +\infty)$

$\quad U(-\infty, r) = P(-\infty, r) = (-\infty, r)$

DEF Funkce f, definovaná na prstencovém okolí $a \in \overline{\mathbb{R}}$, má v a limitu b ($b = \lim_{x \to a} f(x)$; $f(x) \xrightarrow{x \to a} b$), pokud pro každé okolí U bodu b existuje prstencové okolí P bodu a tak, že $f(P) \subset U$.

Tvrzení: $\lim_{x \to a} c = c$ (limita konstanty je konstanta)

$\lim_{x \to a} x = a$

Věta Pro funkci f, definovanou v prstencovém okolí $a \in \mathbb{R}$ je $\lim_{x\to a} f(x) = b \in \overline{\mathbb{R}}$ právě tehdy, když

$$\lim_{x\to a-} f(x) = \lim_{x\to a+} f(x) = b$$

Věta Monotónní funkce na otevřeném intervalu má v jeho krajních bodech limity rovny supremu, či infimu funkčních hodnot

Věta (o jednoznačnosti limity)
Každá funkce má v každém bodě nejvýše jednu limitu

Věta (o monotonii)
Je-li $\lim_{x\to a} f(x) = b$, $\lim_{x\to a} g(x) = c$, $f \leq g$ na prstencovém okolí a
pak $b \leq c$ (limity zachovávají uspořádání)

Věta: Funkce s vlastní limitou v $a \in \overline{\mathbb{R}}$ je omezená na prstencové okolí a

Věta: Je-li $\lim_{x\to a} f(x) > 0$ (<0), pak $f > 0$ (<0) na prstencovém okolí a

Věta: $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ právě tehdy když $\lim_{x\to a} |f(x)| = 0$

Věta: Limita součtu (rozdílu, součinu, podílu) funkcí je součet (rozdíl, součin, podíl) limit pokud je definován (včetně operací s nevlastními čísly

Věta: Je-li limita $\lim_{x\to a} f(x) > 0$, $\lim g(x) = 0$, $g(x) > 0$ na prstencovém okolí a, pak $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ $\quad \left|\frac{1}{0^+}\right| = \pm\infty$

Věta: (o sevření)
Je-li $\lim_{x\to a} f(x) = b = \lim_{x\to a} g(x)$; $f \leq h \leq g$ na prstencovém okolí a pak $\lim_{x\to a} h(x) = b$

Věta: Je-li limita $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, g je omezená na prstencovém okolí a
pak $\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = 0$ $\quad |0 \cdot \text{omez}| = 0$

Věta: Je-li $\lim_{x\to a} f(x) = b \in \{\pm\infty\}$, g je omezená na prstencovém okolí a, pak $\lim_{x\to a} (f(x) + g(x)) = b$ $\quad |\pm\infty + \text{omez}| = \pm\infty$

Věta: Jestliže $\lim_{x\to a} f(x)$ neexistuje, $\lim_{x\to a} g(x) \in \mathbb{R}$, pak
$\lim_{x\to a} (f(x)+g(x))$ neexistuje $\quad |\text{neex} + a| = \text{neex}.$

Věta: Jestliže $\lim_{x\to a} f(x)$ neexistuje, $\lim g(x) \in \mathbb{R}-\{0\}$, pak
$\lim_{x\to a} (f(x)\cdot g(x))$ neexistuje $\quad |\text{neex} \cdot a| = \text{neex}.$

Věta (o limitě složené funkce)
Nechť $a \in \overline{\mathbb{R}}$; $\lim_{x\to a} f(x) = b \in \overline{\mathbb{R}}$
$\lim_{y\to b} g(y) = c \in \overline{\mathbb{R}}$
$g(b) = c$ nebo $f(x) \neq b$ na prstencovém okolí a
Pak $\lim_{x\to a} (g\circ f)(x) = c$

DEF Funkce f je spojitá v $a \in D(f)$, pokud ke každému okolí U bodu $f(a)$ existuje okolí V bodu a tak, že $f(V \cap D(f)) \subset U$

Věta: Funkce f, definovaná v prstencovém okolí a je v bodě a spojitá právě tehdy, když $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Věta: 1) Součet, rozdíl, součin, podíl spojitých funkcí je spojitá funkce
2) Složení spojitých funkcí je spojitá funkce.
3) Je-li funkce f v bodě a spojitá, pak je omezená na okolí bodu a
4) Je-li funkce f v bodě a spojitá, $f(a) > 0$, pak $f > 0$ na okolí a

Věta Mocninné (x^a, $a \in \mathbb{R}$), exponenciální, goniometrické a hyperbolické funkce jsou spojité

Věta Inverzní funkce k funkci spojité na intervalu je spojitá

Věta (o mezihodnotě)
Je-li funkce f spojitá na intervalu I a nabývá-li v něm $m < M$, pak v něm nabývá všech hodnot mezi m a M
→ obrazem intervalu je interval uzavřeného uzavřený
→ spojitá funkce je prostá i právě tehdy, když je ryze

DEF: (Nekonečná) posloupnost (reálných čísel) $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je funkce $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$

DEF: Vybraná posloupnost (podposloupnost) z $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost $(a_{k_n})_{n=1}^{\infty}$, kde $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel

DEF: Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má limitu $b \in \overline{\mathbb{R}}$ ($\lim_{n\to\infty} a_n = b$, $a_n \xrightarrow{n\to\infty} b$), pokud pro každé okolí U bodu b existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $n > n_0$ je $a_n \in U$

Věta: Je-li $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$, pak $\lim_{n\to\infty} f(n) = b$

Tvrzení: Funkce má $\lim_{x\to a} f(x) = b$ právě tehdy když $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = b$ pro každou posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ čísel z $D(f) - \{a\}$ s $\lim_{n\to\infty} a_n = a$

DEF: Bod $a \in \overline{\mathbb{R}}$ je hromadná hodnota posloupnosti, pokud v každém okolí bodu a leží nekonečně mnoho jejích členů

Věta: každá posloupnost má alespoň jednu hromadnou hodnotu (omezená vlastní)

Tvrzení: každá hromadná hodnota posloupnosti je limitou některé vybrané posloupnosti

Tvrzení: Supremum (infimum) množiny hromadných hodnot je hromadná hodnota (limes superior, limes inferior)

Věta: Je ekvivalentní pro posloupnost: (když platí jedno platí i ostatní)
(1) má limitu
(2) má jedinnou hromadnou hodnotu
(3) lim inf = lim sup
(4) každá vybraná posloupnost má stejnou limitu

Věta (Weierstrassova)
Spojitá funkce na uzavřeném intervalu nabývá

Věta (Princip vnořených intervalů)

Jestliže pro uzavřené intervaly I_n, $n \in \mathbb{N}$ platí $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$, pak $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$.

Pokud navíc délky intervalů klesají k 0, je tento průnik jednobodový

DEF Nechť funkce f je definována v okolí a. Derivace (prvního řádu) funkce f v bodě a je:

$$\frac{df}{dx}(a) = f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \underset{\text{subst } h=x-a}{=} \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

DEF) pro jednostranné limity derivace zleva $f'_-(a)$

derivace zprava $f'_+(a)$

derivace funkce: $x \in D(f) \longmapsto f'(x)$

Věta: $(C)' = 0$

$(x^a)' = a \cdot x^{a-1}$, $a \in \mathbb{R}$ $(D(f))$

$(e^x)' = e^x$

$(\sin x)' = \cos x$; $(\cos x)' = -\sin x$

Věta: Funkce je spojitá v každém bodě, ve kterém má vlastní derivaci

---

Věta: (o derivaci součtu, rozdílu, součinu a podílu)

Mají-li funkce f, g v $a \in \mathbb{R}$ vlastní derivace, pak

1) $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$

2) $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$

3) $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g(a)^2}$ $\quad g(a) \neq 0$

Pozn: Derivace je lineární zobrazení

$(f_1 + \dots + f_n)' = f_1' + \dots + f_n'$

$(f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n)' = f_1' \cdot f_2 \dots F_n + f_1 \cdot (f_2 \dots f_n)'$

Věta (o derivaci složené funkce)

Má-li f vlastní derivaci v a, g vlastní derivaci v bodě $f(a)=b$, pak $g \circ f$ má v bodě a derivaci:

$$(g \circ f)'(a) = g'(b) \cdot f'(a)$$

Věta (o derivaci inverzní funkce)

Nechť f je spojitá a ryze monotónní funkce na otevřeném intervalu I, $a \in I$ takový, že $f'(a) \neq 0$.

Pak $f^{-1}{}'(f(b)) = \frac{1}{f'(a)}$ (derivace inverzní funkce v bodě $b = f(a)$)

Věta (další tabulkové derivace)

$(tg\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ $\quad (e^{ax})' = a \cdot e^{ax}$ $\quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$

$(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ $\quad (a^x)' = a^x \cdot \ln a$

$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{x^2+1}$ $\quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\operatorname{arccotg} x)' = \frac{-1}{x^2+1}$ $\quad (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

DEF (Derivace vyšších řádů)

Derivace řádu n (n-tá derivace) $\quad f^{(0)} = f$

$f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$, $n \in \mathbb{N}$

Věta rovnice grafu tečny: $y = f(a) + f'(a)(x-a)$

rovnice grafu normály: $y = f(a) - \frac{1}{f'(a)}(x-a)$

Věta (Rolleova)

Nechť pro funkci f platí: je spojitá na $\langle a, b \rangle$

má derivaci v každém bodě (a, b)

$f(a) = f(b)$

Pak existuje $c \in (a,b)$, tak že $f'(c) = 0$

Věta (Lagrangeova, o přírůstku funkce)

Nechť f je spojitá na $\langle a, b \rangle$ a má derivaci v každém bodě (a, b). Pak existuje $c \in (a,b)$ tak, že

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

Věta (důsledek Lagrangeovy věty)

Nechť f je spojitá v a zprava, existuje limita: $\lim_{x \to a+} f'(x) = f'(a+)$. Pak: $f'_+(a) = f'(a+)$

(obecně lze formulovat i zleva a oboustranně)

Vrzení: (Cauchyho)

Nechť f, g jsou spojité na $\langle a, b \rangle$ a mají vlastní derivaci v každém bodě (a, b), $g' \neq 0$ na (a, b).

Pak existuje $c \in (a, b)$ tak, že

$$\frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Věta: (l'Hospitalovo pravidlo)

Nechť pro funkce f, g platí:

1) $\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a+} g(x) = 0$, nebo $\lim_{x \to a+} |g(x)| = +\infty$

2) existuje $\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Pak $\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

DEF: (Taylorův polynom)

Nechť funkce f má v bodě a derivace až do řádu n.

Taylorův polynom řádu n funkce f v bodě a je

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Věta: (Taylora)

Nechť funkce f má spojité derivace až do řádu $n \geq 0$ na intervalu $\langle a, x \rangle$ $f^{(n+1)}$ existuje na (a, x).

Pak existuje $c \in (a, x)$ tak že:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}_{\text{zbytek v Lagrangeově tvaru}}$$

Pozn: Podobně pro $\langle x, a \rangle$

$n = 0$: $f(x) = f(a) + f'(c)(x-a)$ (Lagrangeova věta)

$f^{(n+1)}$ spoj, x blízko a $\rightarrow$ c je blízko a $\Rightarrow$ $f^{(n+1)}(c)$ je blízko $f^{(n+1)}(a)$

Věta (o monotonii)

Nechť je f spojitá na intervalu I a má derivaci ve vnitřních bodech intervalu.

1) Je-li $f' > 0$ uvnitř I je f rostoucí na I
2) Je-li $f' < 0$ uvnitř I je f klesající na I
3) Je-li $f' \geq 0$ uvnitř I je f neklesající na I
4) Je-li $f' \leq 0$ uvnitř I je f nerostoucí na I

Pozn: $f' = 0$ na intervalu – konstantní funkce
$f' = g'$ na intervalu – f, g se liší o konstantu

Tvrzení: Je-li $f(a) > 0$, pak existuje okolí bodu a tak, že pro $x, y \in U$, $x < a < y$ je $f(x) < f(a) < f(y)$

DEF: Funkce f má v a lokální minimum, (resp lokální maximum) pokud $f(x) \geq f(a)$ (resp $f(x \leq f(a)$. na některém prstencovém okolí a.
Bod a se pak nazývá lokální extrém.
Ostrý lokální extrém definujeme pro ostrou nerovnost

Věta: Má-li funkce f v a lokální extrém, pak $f'(a)$ neexistuje, nebo $f'(a) = 0$ (stacionární bod f)

Věta: Nechť $f'(a) = 0$
Je-li $f''(a) > 0$, pak má f v a ostré lokální minimum
Je-li $f''(a) < 0$, pak má f v a ostré lokální maximum

Věta: Spojitá funkce na uzavřeném intervalu nabývá minima, (resp. maxima) v bodě, ve kterém má lokální minimum (resp. maximum) nebo v krajním bodě intervalu.

DEF: Funkce je konvexní na intervalu I, pokud pro každé $x, y, z \in I$, $x < y < z$ platí

$$\underbrace{\frac{f(y)-f(x)}{y-x}}_{\text{směrnice tečny } x,y} \leq \underbrace{\frac{f(z)-f(y)}{z-y}}_{\text{směrnice tečny } z,x}$$

konkávní definujeme pro $\geq$;
ryze pro ostrou nerovnost

Věta: Je-li f spojitá na intervalu I, pak

1) je-li $f''>0$ uvnitř I, pak f je ryze konvexní na I

2) je-li $f''<0$ uvnitř I, pak f je ryze konkávní na I

(Pro neostrou nerovnost bez "ryze")

DEF Funkce f má v a inflexi ($[a, f(a)]$ je inflexní bod grafu f), pokud $f'(a)$ existuje, f je spojitá v a, a funkce f je na jednom jednostranném okolí a ryze konvexní a na jiném jednostranném okolí a ryze konkávní.

Věta: Má-li f v a inflexi, pak $f''(a)$ neexistuje, nebo $f''(a)=0$

Věta: Je-li $f''(a)=0$ a $f'''(a)\neq 0$, pak má f v bodě a inflexi

DEF Má-li funkce f v bodě $a\in\mathbb{R}$ alespoň 1 jednostrannou limitu nevlastní, nazýváme přímku o rovnici $x=a$ asymptotou f v bodě $a\in\mathbb{R}$ (svislá asymptota)

DEF Asymptota grafu f v $a\in\{\pm\infty\}$ je přímka o rovnici $y=px+q$, pro kterou platí: (šikmá asymptota)

$$\lim_{x\to a}(f(x)-px-q)=0$$

Tvrzení Funkce f má v $a\in\{\pm\infty\}$ asymptotu o rovnici $y=px+q$ právě tehdy když $p=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{x}$ a $q=\lim_{x\to a}(f(x)-px)$

Pozn (asymptoty vyplynou z dřívějších grafů)

- Je-li $\lim_{x\to a} f(x)=b\in\mathbb{R}$ a $a\in\{\pm\infty\}$, pak přímka o rovnici $y=b$ je asymptotou grafu f v a
- Je-li $a\in\{\pm\infty\}$, asymptota v a existuje, $y=px+q$, $\lim_{x\to a} f'(x)$ ex., pak $p=\lim_{x\to a} f'(x)$

Pozn: (Postup vyšetřování průběhu funkce)

1) f: definiční obor, parita, periodicita (sudost, lichost), spojitost, limity v bodech nespojitosti, asymptoty grafu

2) monotonie, f': lok. a globální extrémy, obor hodnot, tečny grafu ve speciálních bodech

3) f'': konvexita, konkavita, inflexní body

DEF (Primitivní funkce)

Funkce F je primitivní k funkci f na intervalu I, pokud $F' = f$ na intervalu I

Věta Nechť f je derivací F na intervalu I, $f(a) < d < F(b)$, pak existuje c mezi a, b tak, že $f(c) = d$

Věta (každá) spojitá funkce na intervalu má primitivní fci.

Věta Je-li F primitivní funkce k f, $c \in \mathbb{R}$, pak $F + c$ je primitivní funkcí k f.

Věta Jsou-li F_1, F_2 primitivní funkce k f na intervalu I, pak $F_1 - F_2$ je konstantní na I

DEF (neurčitý integrál)

Pokud existuje alespoň 1 primitivní funkce k f na intervalu I, nazýváme množinu všech primitivních funkcí k f na I neurčitý integrál f na I

Ozn: $\int f, \int f(x)\,dx = \{F + c, c \in \mathbb{R}\} = F(x) + c$

Věta (tabulkové integrály)

$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c \quad a \in \mathbb{R} - \{-1\}$

$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c \quad \begin{matrix} x \in (-\infty, 0) \\ x \in (0, \infty) \end{matrix}$

$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + c, \quad x \in \mathbb{R}$

$\int \sin ax\,dx = -\frac{1}{a} \cos ax + c, \quad x \in \mathbb{R}$

$\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a} \sin ax + c, \quad x \in \mathbb{R}$

$\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + c, \quad x \in \mathbb{R}$

Věta: Jsou-li $F_1, \dots F_n$ primitivní funkce k $f_1, \dots f_n$ na I, $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$, pak $c_1 F_1 + \dots + c_n F_n$ je primitivní fce k $c_1 f_1 + \dots + c_n f_n$ na I

Věta: (integrace per partes)

Nechť na intervalu I existují funkce u', v' a $\int u' v$.

Pak $\int u \cdot v' = uv - \int u' v$ na I

Věta (o substituci integrálů)

Nechť $(\alpha,\beta) \xrightarrow{\varphi} (a,b) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$. φ' existuje na (α,β), F je primitivní funkce k f na (a,b).

1) $\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + c$ na (α,β)

2) Je-li $\varphi:(\alpha,\beta) \xrightarrow{na} (a,b)$ ryze monotónní, G je primitivní funkce k $f(\varphi(t))\varphi'(t)$, pak $\int f(x)\,dx = G(\varphi_{-1}(x)) + c$ na (a,b)

Věta (speciální případy substituce)

$$\int f(x+a)\,dx = F(x+a)+c$$

$$\int f(ax)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+c$$

$$\int \frac{F'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$$

DEF Racionální (lomenná) funkce je podíl $\frac{P}{Q}$ polynomů P, Q, kde Q je nenulový

DEF Ryze lomená funkce $\frac{P}{Q} \Leftrightarrow st(P) < st(Q)$

Tvrzení Každá racionální funkce se dá (jednoznačně) rozložit na součet polynomu a ryze lomené funkce

Věta: Každý polynom $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ stupně $n \geq 0$ lze vyjádřit ve tvaru:

$$P(x) = a_n (x-c_1)^{k_1}\dots(x-c_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{\ell_1}\dots(x^2+p_sx+q_s)^{\ell_s},$$

kde $c_1 \dots c_r \in \mathbb{R}$ jsou různé reálné kořeny P násobností $k_1 \dots k_r \in \mathbb{N}$, $x_i^2+p_ix+q_i$ $(i=1\dots s)$ jsou různé polynomy bez reálného kořene (ireducibilní, $p_i^2 - 4q_i < 0$), $p_i, q_i \in \mathbb{R}$, s násobnostmi $\ell_1 \dots \ell_s \in \mathbb{N}$

DEF (parciální zlomky)

Parciální zlomky (v reálném oboru) jsou:

$$\frac{A}{(x-a)^n},\ A,a \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N} \qquad \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n},\ A,B,p,q \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N},\ p^2-4q<0$$

Věta každá racionální funkce se dá vyjádřit ve tvaru součtu polynomů a parciálních zlomků, takových, že jejich jmenovatel dělí jmenovatel dané racionální funkce

Pozn: (Postup rozkladu)
1) dělení
2) rozložení jmenovatele
3) rozpis s neurčitými koeficienty
4) určení koeficientů

Věta (integrace racionálních funkcí)

$$1) \int \frac{A}{(x-a)^n}\,dx \dots \int \frac{dx}{(x-a)^n} = \left| \begin{matrix} x-a=t \\ dx=dt \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{t^n} = \dots$$

$$2) \int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n} = \frac{(2x+p)\frac{A}{2} - \frac{p\cdot A}{2} + B}{(x^2+px+q)^n} = \frac{A}{2}\cdot\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n} + \frac{B-p\frac{A}{2}}{(x^2+px+q)^n}$$

$$\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n} = \left| \begin{matrix} x^2+px+q=t \\ (2x+p)\,dx=dt \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{t^n} \dots$$

$\frac{B-p\frac{A}{2}}{x^2+px+q}$ → doplnění na čtverec → arctg x

$\frac{B-p\frac{A}{2}}{(x^2+px+q)^n}$ → rekurentní předpis (složité)

Věta (vybrané substituce v racionálních funkcích)

$$\int R(e^{ax})\,dx = \left| \begin{matrix} e^{ax}=t \\ x=\frac{1}{a}\ln t \\ dx=\frac{1}{at}\,dt \end{matrix} \right| = \int \frac{R(t)}{at}\,dt$$

$$\int \frac{R(\ln x)}{x}\,dx = \left| \begin{matrix} \ln x = t \\ \frac{1}{x}\,dx = dt \end{matrix} \right| = \int R(t)\,dt$$

$$\int R(\sin x \cos x)\,dx = \left| \begin{matrix} \operatorname{tg}\frac{x}{2}=t \\ x=2\operatorname{arctg} t \\ dx=\frac{2}{t^2+1}\,dt \end{matrix} \right|$$

$x \in (-\pi, \pi)$

subst za:

$$\sin x = \frac{2t}{t^2+1}$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1}$$

$$\int R(\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x\cdot\cos x)\,dx = \left| \begin{matrix} \operatorname{tg} x = t \\ x=\operatorname{arctg}(t) \\ dx=\frac{1}{t^2+1}\,dt \end{matrix} \right|$$

$x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

subst. za:

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{t^2+1}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{t^2+1}$$

$$\sin x\cdot\cos x = \frac{t}{t^2+1}$$

Věta: (vybrané substituce v rac. fcích)

$$\int R(\sin^2 x, \cos x)\cdot \sin x\, dx = \left|\begin{matrix}\cos x = t \\ \sin x\, dx = -dt\end{matrix}\right|$$

$$\int R(\sin x, \cos^2 x)\cdot \cos x\, dx = \left|\begin{matrix}\sin x = t \\ \cos x\, dx = dt\end{matrix}\right|$$

$\int \sin^n x \cdot \cos^m x$ - výše uvedené, pokud nelze:

$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$

$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) = \left|\begin{matrix}\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t \\ x = R_x(t) \\ dx = R_x'(t)\end{matrix}\right|$$

$$\int R\cdot\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx \longrightarrow \int R\left(t, \sqrt{\pm t^2 \pm A^2}\right)$$

$\sqrt{-t^2-A^2}$ nelze

$\sqrt{A^2-t^2}$ subst: $t = A\sin u$, $u \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
$t = A\cdot\cos u$, $u \in (0, \pi)$

$\sqrt{t^2-A^2}$ subst: $t = \frac{A}{\sin u}$ $\quad \sqrt{t^2-A^2}+t = u$
$t = \frac{A}{\cos u}$ $\quad t = A\cdot\cosh u$

$\sqrt{t^2+A^2}$ subst $t = A\cdot \mathrm{tg}\, u$
$t = A\cdot \mathrm{cotg}\, u$ $\quad \sqrt{t^2+A^2}+t = u$
$t = A\cdot\sinh u$

} Eulerovy substituce

(DEF) Dělení intervalu $\langle a,b\rangle$ je konečná množina $D \supset \{a,b\}$,
$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

Dolní integrální součet pro f, D: $\underline{S}(f,D) = \sum_{i=1}^{n} \inf f(\langle x_{i-1}, x_i\rangle)(x_i - x_{i-1})$

Horní integrální součet pro f, D: $\overline{S}(f,D) = \sum_{i=1}^{n} \sup f(\langle x_{i-1}, x_i\rangle)(x_i - x_{i-1})$

DEF Nechť f je omezená na (a,b), $\mathcal{D}$ je množina všech dělení $\langle a,b\rangle$. Pokud $\sup\{\underline{S}(f,D) : D\in\mathcal{D}\} = \inf\{\overline{S}(f,D) : D\in\mathcal{D}\}$, nazveme tuto hodnotu určitý (Riemanův) integrál f na $\langle a,b\rangle$

Ozn: $\int_a^b f$ $\quad a$ .... dolní mez, b .... horní mez ; $\int_a^b f(x)\,dx$; $(R)\text{-}\int_a^b f(x)\,dx$

Věta Pro omezenou f na $\langle a,b\rangle$ existuje $\int_a^b f(x)\,dx$ právě tehdy, když existuje posloupnost dělení $(D_n)_{n=1}^{\infty}$ tak, že $\lim_{n\to\infty} \underline{S}(f,D_n) = \lim \overline{S}(f,D_m)$. Pak je tato limita rovna příslušnému integrálu

Věta Hodnota Riemanova integrálu nezávisí na hodnotě funkce v konečně mnoha bodech.

Pozn (Lebesgův integrál)
Hodnota Lebesgueova integrálu nezávisí na hodnotě funkce ve spočetně mnoha bodech.

Věta $\int_a^b f(x)\,dx$ existuje pokud platí některá z následujících podmínek:

1) f je spojitá na $\langle a,b\rangle$
2) f je monotónní na $\langle a,b\rangle$

Věta: Nechť f,g jsou omezené funkce na $\langle a,b\rangle$, $\int_a^b f(x)\,dx$, $\int_a^b g(x)$ existují.
Pak:

1) $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

2) $\int_a^b c\cdot f(x)\,dx = c\cdot \int_a^b f(x)\,dx$

3) Je-li $f \le g$ na $\langle a,b\rangle$, pak $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$

4) $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$

Věta: (o aditivitě na definičním oboru)
Nechť f je omezená na $\langle a,b\rangle$, $c\in(a,b)$. Pak $\int_a^b f$ existuje právě tehdy, když existují $\int_a^c f$, $\int_c^b f$.
V takovém případě $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

Pozn: (Rozšíření definice)
$\int_a^a f = 0$; $\int_b^a f = -\int_a^b f$ pro $a<b$; $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_b^c f$

Pozn: Po částech spojité funkce na uzavřeném intervalu jsou integrovatelné

Věta: Nechť f je omezená na $\langle a,b\rangle$, $\int_a^b f$ existuje.
Pak pro tato funkci $F(x) = \int_a^b f(t)\,dt$ platí:
1) je spojitá,
2) je-li f spojitá v $X \in \langle a,b\rangle$ pak $F'(x) = f(x)$

Věta: (Důsledek předchozí)
Funkce spojitá na intervalu má na tomto intervalu primitivní funkci

Věta (derivace integrálu podle horní meze)

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x)$$

Pozn: V bodech nespojitosti f jsou jednostranné derivace F rovny příslušným jednostranným limitám f (pokud existují)

Věta (Newton-Leibnitzova formule)
Nechť f je omezená funkce na $\langle a,b\rangle$. Jestliže existuje $\int_a^b f$ a primitivní funkce F k f na (a,b), pak:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{F(b^-)}_{\lim\limits_{x\to b^-} F(x)} - \underbrace{F(a+)}_{\lim\limits_{x\to a+} F(x)} = [F(x)]_a^b$$

Pozn: (Newtonův integrál)
$(N)-\int_a^b f(x)\,dx = F(b^-) - F(a+)$
Jestliže existuje Newtonův i Riemannův integrál, pak se rovnají

DEF (Nevlastní integrál)
Nechť $f:(a,b) \to \mathbb{R}$, $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$. Funkce není omezená, nebo (a,b) není omezený.
Předpokládáme také, že $\int_c^d f$ existuje pro každé $c,d \in (a,b)$ $c<d$
Definujeme nevlastní integrál $\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{c\to a+}\int_c^e f(x)\,dx + \lim\limits_{d\to b^-}\int_e^d f(x)\,dx$.
Pokud je výraz vpravo definován.

Věta Je-li $f \leq g$ na (a,b), $(a,b \in \overline{\mathbb{R}})$, $\int_a^b f(x)\,dx = +\infty$,
g je po částech spojitá, pak $\int_a^b g(x)\,dx = +\infty$

Je-li $|f| \leq g$ na (a,b), $(a,b \in \overline{\mathbb{R}})$, $\int_a^b g(x)\,dx$ konverguje,
pak $\int_a^b f(x)\,dx$ konverguje

Věta (Podmínka konvergence)
$\int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)}$ konverguje právě tehdy když:
1) Q nemá v $\langle a,b\rangle$ kořen větší než násobnost P
2) (a,b) je omezený, nebo $st\,Q \geq st\,P + 2$

Pozn: Laplaceova transformace
$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-pt}\,dt$$

Pozn: Funkce gama
$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,dt$$
pF: $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$
$\Gamma(n) = (n-1)!$ $n \in \mathbb{N}$

DEF Střední hodnota f na $\langle a,b\rangle$ je $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\,dt$

Věta (O nabývání střední hodnoty)
Spojitá funkce na uzavřeném intervalu nabývá své střední hodnoty

Věta Nechť $f \leq g$ jsou po částech spojité funkce na (a,b) $(a,b \in \overline{\mathbb{R}})$.
Pak obsah plochy $\{[x,y]: a < x < b,\ f(x) \leq y \leq g(x)\}$ je
(obsah plochy mezi grafy fcí) $\int_a^b g(x) - f(x)\,dx$

Věta: Nechť f má po částech spojitou derivaci na (a,b). Délka grafu funkce f je $\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$

Věta: Nechť f je po částech spojitá funkce na (a,b).
Objem $\{[x,y,z]: a < x < b,\ y^2 + z^2 \leq f^2(x)\}$ je $\pi \cdot \int_a^b f^2(x)\,dx$
(objem rotačního tělesa)

Věta: Nechť f má po částech spojitou derivaci na (a,b).
Obsah plochy $\{[x,y,z]: a<x<b,\ y^2+z^2=f^2(x)\}$ je
(povrch rotačního tělesa) $2\pi \cdot \int_a^b f(x)\cdot\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$

Pozn: (těžiště v $\mathbb{R}^2$)
$x_T = \frac{M_y}{m}$ moment, hmotnost
$y_T = \frac{M_x}{m}$
$M_y = \rho \cdot \int_a^b x\cdot\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$
$M_x = \rho \cdot \int_a^b f(x)\cdot\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$
$T[x_T, y_T]$

Pozn (Numerická integrace)
použity, když řešení je obtížné najít
zatíženy chybou
typ výpočet na 1 pokus a typ iterační

(DEF) Iterační metoda konverguje, pokud $\lim_{n\to\infty} x_n$ je řešení
s iteracemi $(x_n)_{n=1}^{\infty}$

(DEF) Iterační metoda má řád alespoň p, pokud na některém
okolí řešení $\bar{x}$ je $|x_n-\bar{x}| \le C\cdot|x_{n-1}-\bar{x}|^p$

Pozn Gaussova metoda
- optimální výběr uzlů (dělících bodů) a vah (váha určitého uzlu
- řád dvojnásobkem počtu uzlů

Pozn Newtonovy-Cotesovy metody $\frac{b-a}{n}=h$
- uzavřené (včetně a,b), otevřené - bez a,b
- složené metody - dělíme interval, na každé části používáme vhodnou

Pozn Obdélníková metoda
- na každém dílčím 1 uzel $I \approx R(h) = h\cdot\left(f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)+\dots+f\left(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\right)\right)$

Věta Má-li f na $\langle a,b\rangle$ spojitou druhou derivaci pak
$|I-R(h)| \le \frac{M_2}{24}(b-a)\cdot h^2$

Pozn Lichoběžníková metoda
$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx = h\cdot\left(\frac{1}{2}f(x_{i-1})+\frac{1}{2}(f(x_i)\right)$ - obsah lichoběžníka daný krajními body
$I \approx T(h) = h\cdot\left(\frac{1}{2}f(a)+f(x_1)+\dots f(x_{n-1})+\frac{1}{2}f(b)\right)$
(x_0, x_n)
$|I-T(h)| \le \frac{M_2}{12}n\cdot h^3 = \frac{M_2}{12}\cdot(b-a)\cdot h^2$

Pozn Simpsonova metoda
- přes dva sousední interrvaly
$|I-S(h)| \le \frac{M_4}{\dots}\cdot(b-a)\cdot h^4$, $M_4 = \max f^{(4)}(x)$

Pozn: Richardsonova extrapolace

$$F(h) = \underbrace{F(0)}_{\text{přesná hodnota}} + \underbrace{a \cdot h^p}_{\text{chyba}} + \underbrace{\mathcal{O}(h^q)}_{\text{chyba dalších řádů}}, \quad p < q$$

- aproximujeme hodnotu mimo interval, kde pracujeme

Pozn Rombergova metoda
- postupné extrapolace T_1 průběžně vylepšujeme

Věta (kompaktnost $\langle a,b \rangle$)
Z každého pokrytí $\langle a,b \rangle$ lze otevřenými intervaly vybrat konečné pod pokrytí

DEF Funkce f je stejnoměrně spojitá pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $y, z \in \mathcal{D}(f)$ platí: jestliže $|y - z| < \delta$, pak $|f(y) - f(z)| < \varepsilon$

Pozn: Funkce s omezenou derivací je stejnoměrně spojitá

Věta: Spojitá funkce na uzavřeném intervalu je stejnoměrně spojitá

(DEF) Obyčejná diferenciální rovnice řádu n

$$F(t, x, x', \dots, x^{(n)}) = 0 \quad ; \quad x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)})$$

Řešení diferenciální rovnice na intervalu I

$$x : I \to \mathbb{R}, \quad x^{(n)}(t) = f(t, x(t), x'(t), \dots x^{(n-1)}(t))$$

Obecné řešení - s parametry
Partikulární řešení - zadáno počátečními podmínkami
Diferenciální rovnice 1. řádu: $x' = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$

Věta (existence a jednoznačnost řešení)
Nechť I, J jsou otevřené intervaly, f je spojita na $I \times J$, $t_0 \in I$, $x_0 \in J$. Pak $x' = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$ má řešení na některém $I' \subset I$, $I' \ni t_0$

Je-li navíc $\frac{\partial f}{\partial x}$ lokálně omezená na $I \times J$, je toto řešení jednoznačné.

Věta (o řešení separovatelné DR)

Nechť g je spojitá na intervalu $I \ni t_0$

h je spojitá na intervalu $J \ni x_0$

Pak $x' = g(t) \cdot h(x)$ spolu podmínkou $x(t_0) = x_0$ má řešení na nějakém intervalu $I' \subset I$, $I' \ni t_0$

Je-li navíc h' spojitá na J, je toto řešení jednoznačné.

Pozn: (řešení separovatelné DR). $x' = g(t)\,h(x)$, g, h, h' spojité

1) max intervaly spojitosti g I
2) stacionární řešení $x(t) = x_1$, $t \in I$ $(h(x_1) = 0)$
3) max intervaly spojitosti a nenulovosti h ..... J
4) pro $(t_0, x_0) \in I \times J$ (mimo stac. řešení) provedeme separaci proměnných ..... řešení $I \times J$.

(DEF) (Lineární diferenciální rovnice 1. řádu)

$x' = a(t)\,x + b(t)$, $x(t_0) = x$

Věta Nechť $a(t), b(t)$ jsou spojité funkce na intervalu I, $t_0 \in I$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

Pak $x' = a(t)\,x + b(t)$, $x(t_0) = x_0$ má jediné řešení na intervalu I

DEF $x' = a(t) \cdot x$ ... přidružená homogenní DR

Věta Jsou-li x_1, x_2 řešení LDR, pak $(x_1 - x_2)$ je řešením přidružené homogenní DR

Věta Je-li $\hat{x}$ řešení, a $\tilde{x}$ je řešení přidružené homogenní DR, pak $(\hat{x} + \tilde{x})$ je řešení dané LDR

Věta (Princip superpozice)

Jsou-li x_1, x_2 řešení $x' = a(t)\,x + b_1(t)$

$x' = a(t)\,x + b_2(t)$

pak $(x_1 + x_2)$ je řešení $x' = a(t) + (b_1(t) + b_2(t)$

DEF $D: x(t) \to x'(t) - a(t)x(t)$
diferenciální operátor

Pozn (řešení LDR)
Hledáme $x(t)$ takovou, že $D(x(t)) = b(t)$
levá strana pravá strana

Věta Množina řešení homogenní LDR prvního řádu tvoří lineární prostor dimenze 1
($D(x(t)) = 0$ - množina řešení je jádro D)

Pozn (obecný postup řešení LDR 1. řádu)
1) Separace proměnných - obecné řešení přidružené homogenní diferenciální rovnice $x'(t) = a(t)x$
$\to \tilde{x}(t) = c \cdot x_1(t)$
2) Partikulární řešení metodou variace konstanty
$\to \hat{x}(t) = c(t)\, x_1(t)$
3) Obecné řešení
$\to x(t) = \hat{x}(t) + \tilde{x}(t)$
4) Dosazení případné počáteční podmínky

Pozn: (Numerické řešení DR 1. řádu)
- DR lze také řešit numericky
- problémem jsou ale zaokrouhlovací chyby, které mohou hodně narůstat
- chyby se odhadují pomocí Richardsonovy extrapolace

jednokrokové metody
Eulerova, metoda středního bodu, Heunova, obecná Rungorova-Kuttera va metoda

víckrokové metody
Nyströmova metoda