Reálná čísla

$\mathbb{N}$ … *přirozená* čísla: $\{1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{Z}$ … *celá* čísla: $\{0, \pm1, \pm2, \pm3, \dots\}$
$\mathbb{Q}$ … *racionální* čísla: $\left\{\frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N}\right\}$
$\mathbb{R}$ … *reálná* čísla
$\mathbb{C}$ … *komplexní čísla*: $\{x + \mathrm{j}y : x, y \in \mathbb{R}\}$, $\mathrm{j}^2 = -1$
$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ … *iracionální* čísla ($\sqrt{2}$, π, e, …)

Tvrzení. *Mezi každými dvěma reálnými čísly je nekonečně mnoho čísel racionálních i iracionálních.*

Definice. Reálné číslo x se nazývá:
kladné, pokud $x > 0$;
záporné, pokud $x < 0$;
nezáporné, pokud $x \geq 0$;
nekladné, pokud $x \leq 0$.

číselná osa

Definice. Pro každé $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, rozeznáváme tyto typy *intervalů* s *krajními body* a, b:
$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ (*otevřený*);
$\langle a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ pro $a, b \in \mathbb{R}$ (*uzavřený*);
$(a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ pro $b \in \mathbb{R}$ (*polouzavřený*);
$\langle a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ pro $a \in \mathbb{R}$ (*polouzavřený*).
Body intervalu, které nejsou krajní, nazýváme *vnitřní body*.

Definice. *Rozšířená množina reálných čísel* je $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, kde $-\infty$ a $+\infty$ se nazývají *nevlastní* čísla. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ pokládáme:
1) $-\infty < x < +\infty$
2) $|-\infty| = |+\infty| = +\infty$
3)

$$x + \infty = \infty\,, \qquad \infty + \infty = \infty\,,$$
$$x - \infty = -\infty\,, \qquad -\infty - \infty = -\infty\,,$$
$$x \cdot \infty = \begin{cases} +\infty\,, & x > 0\,, \\ -\infty\,, & x < 0\,, \end{cases} \qquad \infty \cdot \infty = \infty\,,$$
$$\frac{x}{\infty} = 0\,.$$

Nedefinujeme: $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$.

Poznámka. Nevlastní čísla využíváme při popisu intervalů, například:
$(-\infty, 0) = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$,
$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

Definice. Nechť $M \subset \mathbb{R}$. Číslo $k \in \mathbb{R}$ se nazývá:
horní mez množiny M, pokud $x \leq k$ pro každé $x \in M$;
dolní mez množiny M, pokud $x \geq k$ pro každé $x \in M$.
Množina M se nazývá:
shora omezená, pokud má horní mez;
zdola omezená, pokud má dolní mez;
omezená, pokud má horní i dolní mez.

Příklady.
1) $\mathbb{N}$ je zdola omezená, není shora omezená.
2) $\mathbb{Z}$ není omezená ani zdola, ani shora.
3) $(0, 1)$ je omezená množina.

Definice. Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná. *Supremum množiny* M ($\sup M$) je nejmenší horní mez množiny M ($+\infty$ pro shora neomezenou), *infimum množiny* M ($\inf M$) je největší dolní mez množiny M ($-\infty$ pro zdola neomezenou).

Příklady. Pro intervaly $\langle 0, 1\rangle$, $(0, 1)$ dostáváme:
$\sup\langle 0, 1\rangle = \min\langle 1, +\infty) = 1$, $\inf\langle 0, 1\rangle = \max(-\infty, 0\rangle = 0$,
$\sup(0, 1) = \min\langle 1, +\infty) = 1$, $\inf(0, 1) = \max(-\infty, 0\rangle = 0$.

Poznámka. Jestliže existuje maximum (minimum) množiny, pak je zároveň supremem (infimem) této množiny.

Věta. *Každá neprázdná množina reálných čísel má supremum i infimum.*

Věta (princip vnořených intervalů)**.** *Jestliže pro uzavřené intervaly I_n ($n \in \mathbb{N}$) platí $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$, pak $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$. Jestliže navíc délky intervalů I_n klesají k nule, pak je tento průnik jednobodový.*

Důkaz: Označme $I_n = \langle a_n, b_n\rangle$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Z předpokladů vyplývá, že $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq b_3 \leq b_2 \leq b_1$. Množina $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ je neprázdná, shora omezená každým číslem b_n, má tedy v $\mathbb{R}$ supremum, označme ho a. Protože $a \leq b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, má množina $\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ v $\mathbb{R}$ infimum, označme ho b. Protože $a \leq b$, je $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \neq \emptyset$. Jestliže délky intervalů I_n klesají k nule, pak $a = b$.

Poznámka. Podmínka uzavřenosti intervalů ve výše uvedené větě je podstatná: je-li $I_n = (0, \frac{1}{n})$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, pak $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$ a $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \emptyset$.

Funkce

Definice. (*Reálná*) *funkce* (*reálné proměnné*) je zobrazení $A \to \mathbb{R}$, kde $A \subset \mathbb{R}$ je neprázdná.
Množina A je *definiční obor* funkce f ($D(f)$), množina $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$ je *obor hodnot* funkce f ($R(f)$).
Graf funkce f je množina $\{[x, f(x)] : x \in D(f)\}$.

Poznámka. Pokud není zadán definiční obor, bereme maximální možný.

Definice. Funkce $f : A \to B$ se nazývá
prostá, pokud různým vzorům odpovídají různé obrazy;
na B, pokud její obor hodnot je B ($f : A \xrightarrow{\text{na}} B$);
vzájemně jednoznačná, pokud je prostá na B.

Příklady.
1) x^2 není prostá ($f(1) = f(-1)$), je na $\langle 0, +\infty)$.
2) x^3 je prostá na $\mathbb{R}$.

Poznámka. Neostré uspořádání $f \leq g$ a operace sčítání, odčítání, násobení a dělení funkcí definujeme „bodově“.

Definice. *Složení* funkcí $f : A \to B$ a $g : B \to C$ je funkce $g \circ f : A \to C$ definovaná předpisem $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$.

Příklad. $f(x) = 2x$, $g(x) = x^2$:
$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = \big(f(x)\big)^2 = (2x)^2 = 4x^2$,
$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = 2g(x) = 2x^2$.

Definice. Funkce $g : R(f) \to A$ je *inverzní* k funkci $f : A \to B$, pokud $(g \circ f)(x) = x$ pro každé $x \in A$. Značíme $g = f_{-1}$.

Věta. *Funkce f má inverzní funkci právě tehdy, když je prostá. Pak $R(f_{-1}) = D(f)$ a f je inverzní funkce k f_{-1}.*

Poznámka. Graf f_{-1} je symetrický s grafem f podle osy prvního a třetího kvadrantu (přímky o rovnici $y = x$).

Příklady. 1) x^2 je prostá na $\langle 0, \infty)$, má inverzní $\sqrt{x}$.
2) $f(x) = \mathrm{e}^x \colon \mathbb{R} \xrightarrow{\text{na}} (0, +\infty)$ je prostá, má inverzní $g(x) = \ln x \colon (0, +\infty) \xrightarrow{\text{na}} \mathbb{R}$; $g \circ f \neq f \circ g$.

Definice. Funkce f je (*zdola*, *shora*) *omezená na* $A \subset D(f)$, pokud je (zdola, shora) omezená množina $f(A)$.

Poznámka. Pokud neurčujeme A, myslíme $D(f)$.

Příklady.
1) x^2 je zdola omezená ($x^2 \geq 0$), není shora omezená.
2) $\operatorname{arctg} x$ je omezená.
3) x^3 není omezená zdola ani shora.

Definice. Funkce f je *rostoucí* (resp. *klesající*, *neklesající*, *nerostoucí*) na množině $A \subset D(f)$, pokud $f(x) < f(y)$ (resp. $f(x) > f(y)$, $f(x) \leq f(y)$, $f(x) \geq f(y)$) pro všechna $x, y \in A$ taková, že $x < y$.
Všechny takové funkce se nazývají *monotonní*, rostoucí a klesající funkce se nazývají *ryze monotonní*.

Příklady.
1) x^2 je klesající na $(-\infty, 0\rangle$, rostoucí na $\langle 0, +\infty)$.
2) $\operatorname{sign} x$ je neklesající.

Věta. *Rostoucí* (*klesající*) *funkce je prostá a má inverzní funkci, která je rovněž rostoucí* (*klesající*).

Definice. Funkce f je
1) *sudá*, pokud $f(-x) = f(x)$ pro každé $x \in D(f)$;
2) *lichá*, pokud $f(-x) = -f(x)$ pro každé $x \in D(f)$.

Příklady.
1) x^2 je sudá.
2) x^3 je lichá.

Poznámka. Graf sudé funkce je osově symetrický podle osy y, graf liché funkce je středově symetrický podle počátku.

Definice. Funkce f se nazývá *periodická* s *periodou* $p > 0$, pokud $f(x + p) = f(x - p) = f(x)$ pro každé $x \in D(f)$.

Příklad. Funkce $\sin x$ je periodická s periodou 2π.

Poznámka. Má-li funkce periodu p, má i periody np ($n \in \mathbb{N}$). Nejmenší perioda (pokud existuje) se nazývá *základní*.

Elementární funkce

mocniny x^a
definiční obor pro racionální $a = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, p, q nesoudělné:

	q liché	q sudé
$p \geq 0$	R	$\langle 0, +\infty)$
$p < 0$	$R \setminus \{0\}$	$(0, +\infty)$

pro $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ pokládáme $x^a = \mathrm{e}^{a \ln x}$, tedy $D(f) = (0, +\infty)$

exponenciální funkce o základu $a > 0$: a^x
logaritmus o základu $a > 0$: $\log_a x$
($\log x$ pro základ 10, $\ln x$ pro základ e)
Pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ a každé $a > 0$ platí

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y\,, \qquad (a^x)^y = a^{xy}\,.$$

Pro každé $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ platí

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y\,, \qquad x, y > 0\,,$$
$$\log_a x^y = y \log_a x\,, \qquad x > 0\,.$$

goniometrické funkce: $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\operatorname{tg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$
inverzní funkce: $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arccotg} x$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$
$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$
$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

hyperbolické funkce:

$$\sinh x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\,, \qquad \operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x}\,,$$
$$\cosh x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\,, \qquad \operatorname{cotgh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x}\,.$$

inverzní funkce $\operatorname{argsinh} x$, $\operatorname{argcosh} x$, $\operatorname{argtgh} x$, $\operatorname{argcotgh} x$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$
$$\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$
$$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

Limity a spojitost funkcí

Definice. *Okolí bodu* $a \in \mathbb{R}$ o poloměru $r > 0$ je
$U(a, r) = \{x \in \mathbb{R} \colon |x - a| < r\} = (a - r, a + r)$.
Prstencové okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ o poloměru $r > 0$ je
$P(a, r) = U(a, r) \setminus \{a\} = (a - r, a) \cup (a, a + r)$.
Okolí bodů $\pm\infty$ jsou (r je reálné číslo):
$U(-\infty, r) = P(-\infty, r) = \{x \in \mathbb{R} \colon x < r\} = (-\infty, r)$,
$U(+\infty, r) = P(+\infty, r) = \{x \in \mathbb{R} \colon x > r\} = (r, +\infty)$.

Definice. Funkce f definovaná v prstencovém okolí bodu $a \in \overline{\mathbb{R}}$ má v bodě a *limitu* $b \in \overline{\mathbb{R}}$ ($\lim_{x \to a} f(x) = b$, $f(x) \xrightarrow{x \to a} b$), jestliže platí: Ke každému okolí U bodu b existuje prstencové okolí P bodu a tak, že $f(P) \subset U$.

Poznámka. Obecněji se definuje limita v hromadném bodě definičního oboru.

Tvrzení. *Pro každé* $a \in \overline{\mathbb{R}}$ *platí:*
1) $\lim_{x \to a} c = c$ *pro každé* $c \in \mathbb{R}$.
2) $\lim_{x \to a} x = a$.

Důkaz: 1) $f^{-1}(U) = \mathbb{R}$ pro každé U, např. $P = P(a, 1)$.
2) $f^{-1}(U) = U$ pro každé U, např. $P = U \setminus \{a\}$.

Příklad. $\lim_{x \to +\infty} \sin x$ neexistuje: pro $b \in \overline{\mathbb{R}}$ existuje $U_b \not\supset \langle -1, 1\rangle$, $f^{-1}(U_b)$ neobsahuje prstencové okolí $+\infty$.

Poznámka. *Jednostranné limity* pro levá/pravá prstencová okolí a (body prstencového okolí nalevo/napravo od a).

Příklad. $\lim_{x\to 0-} \operatorname{sign} x = -1$, $\lim_{x\to 0+} \operatorname{sign} x = +1$.

Věta. *Limita v bodě $a \in \mathbb{R}$ existuje právě tehdy, když existují obě jednostranné limity a rovnají se.*

Poznámka. Následující věty lze formulovat i pro jednostranné limity.

Věta (o jednoznačnosti)**.** *Každá funkce má v každém bodě nejvýše jednu limitu.*

Důkaz: Pokud má v a limitu b, tak jiné číslo $c \in \overline{\mathbb{R}}$ není limitou: existují disjunktní okolí U_b, U_c bodů b, c, $f^{-1}(U_c)$ je disjunktní s $f^{-1}(U_b)$ a neobsahuje tedy prstencové okolí a.

Věta (o monotonii)**.** *Je-li $\lim_{x\to a} f(x) = b$, $\lim_{x\to a} g(x) = c$ a $f \le g$ na prstencovém okolí bodu a, pak $b \le c$.*

Důkaz (sporem): Pro $b > c$ existují disjunktní okolí U_b, U_c bodů b, c a prstencová okolí P_b, P_c bodu A tak, že $f(P_b) \subset U_b$, $f(P_g) \subset U_c$, pro $x \in P_f \cap P_g$ je $f(x) > g(x)$ – spor.

Příklad. Ne pro $<$: $0 < \frac{1}{x}$ na $(0, +\infty)$, v $+\infty$ stejná limita.

Věta. *Funkce s vlastní limitou v a je omezená na prstencovém okolí a.*

Věta. *Funkce s kladnou (zápornou) limitou v a je na prstencovém okolí a kladná (záporná).*

Věta. $\lim_{x\to a} = 0$ *právě tehdy, když* $\lim_{x\to a} |f(x)| = 0$.

Důkaz: $f(x) \in U(0,\varepsilon)$ právě tehdy, když $|f(x)| \in U(0,\varepsilon)$.

Věta. *Monotonní funkce na intervalu má v jeho krajních bodech příslušné jednostranné limity (supremum a infimum funkčních hodnot).*

Důkaz (pro f neklesající na $I = (a,b)$): $c = \sup f(I)$, okolí U bodu c má levý krajní bod d, existuje $e \in (d,c) \cap f(I)$, $f^{-1}(U) \supset (f_{-1}(e), b)$ – levé prstencové okolí b.

Příklad. $\mathrm{e}^x : \mathbb{R} \xrightarrow{\text{na}} (0,+\infty)$ je rostoucí, tedy
$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = \inf(0,+\infty) = 0$,
$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = \sup(0,+\infty) = +\infty$.

Příklad.

$$\lim_{x\to+\infty} x^a = \begin{cases} +\infty\,, & a > 0\,, \\ 1\,, & a = 0\,, \\ 0\,, & a < 0\,, \end{cases} \qquad \lim_{x\to 0+} x^a = \begin{cases} 0\,, & a > 0\,, \\ 1\,, & a = 0\,, \\ +\infty\,, & a < 0\,. \end{cases}$$

Věta (limita součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí)**.** *Limita součtu (rozdílu, součinu, podílu) funkcí je součet (rozdíl, součin, podíl) limit, pokud je definován (včetně operací s nevlastními čísly).*

Důkaz (pro součet vlastních limit): Pro $U(b+c,\varepsilon)$ uvažujme $f(P_f) \subset U(b, \frac{\varepsilon}{2})$ a $f(P_g) \subset U(c, \frac{\varepsilon}{2})$, pak $(f+g)(P_f \cap P_g) \subset \subset U(b+c,\varepsilon)$.

Příklady.

1) $\lim_{x\to+\infty} (2x^2 - 3x + 1) = |\infty - \infty + 1|$ nedefinováno
$= \lim_{x\to+\infty} x^2(2 - 3x^{-1} + x^{-2}) = (+\infty)\cdot 2 = +\infty\,,$

2) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{2x-1}{x^2+1} = \left|\dfrac{-\infty}{+\infty}\right|$ nedefinováno
$= \lim_{x\to-\infty} \dfrac{2x^{-1} - x^{-2}}{1 + x^{-2}} = \dfrac{0-0}{1+0} = 0\,,$

3) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^2-1} = \left|\dfrac{0}{0}\right|$ nedefinováno
$= \lim_{x\to 1} \dfrac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1} \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{2}\,.$

Tvrzení. *Je-li $\lim_{x\to a} f(x) > 0$, $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ a $g > 0$ na prstencovém okolí bodu a, pak $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = +\infty$.*

Poznámka.

$$\left|\frac{1}{0\pm}\right| = \pm\infty$$

Příklady.

1) $$\lim_{x\to 1\pm} \frac{2}{x-1} = \left|\frac{2}{0\pm}\right| = \pm\infty\,.$$

2) $$\lim_{x\to 1} \frac{-2}{(x-1)^2} = \left|\frac{-2}{0+}\right| = -\infty\,.$$

Tvrzení. *Je-li $\lim_{x\to a} f(x) = b \in \{\pm\infty\}$ a g je omezená na prstencovém okolí a, pak $\lim_{x\to a}\big(f(x) + g(x)\big) = b$.*

Poznámka.

$$|\pm\infty + \text{omez.}| = \pm\infty$$

Příklad. $\lim_{x\to\infty}(x + \cos x) = |+\infty + \text{omez.}| = +\infty$.

Věta (o sevření)**.** *Je-li $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = b$ a $f \le h \le g$ na prstencovém okolí a, pak $\lim_{x\to a} h(x) = b$.*

Věta. *Je-li $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, g je omezená na prstencovém okolí a, pak $\lim_{x\to a} f(x)\,g(x) = 0$.*

Poznámka.

$$|0 \cdot \text{omez.}| = \left|\frac{\text{omez.}}{\pm\infty}\right| = 0$$

Příklad. $\lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = |0 \cdot \text{omez.}| = 0$.

Tvrzení. *Jestliže $\lim_{x\to a} f(x)$ neexistuje, pak platí:*
1) Je-li $\lim_{x\to a} g(x)$ vlastní, pak $\lim_{x\to a}\big(f(x) \pm g(x)\big)$ neexistuje.
2) Je-li $\lim_{x\to a} g(x)$ vlastní a nenulová, pak neexistují $\lim_{x\to a}\big(f(x)\cdot g(x)\big)$ a $\lim_{x\to a}\big(f(x)/g(x)\big)$.

Příklad. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{1-2^{-x}} = \left|\frac{\text{neex.}}{1}\right|$ neexistuje.

Poznámka.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\,, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1\,.$$

Věta (limita složené funkce)**.** *Nechť pro $a \in \overline{\mathbb{R}}$ platí:*
(1) $\lim_{x\to a} f(x) = b \in \overline{\mathbb{R}}$,
(2) $\lim_{y\to b} g(y) = c \in \overline{\mathbb{R}}$.
(3) $g(b) = c$ *nebo* $f(x) \neq b$ *na prstencovém okolí* a.
Pak $\lim_{x\to a}(g \circ f)(x) = c$.

Důkaz: U_c
(2): existuje P_b: $P_b \xrightarrow{g} U_c$
(1): existuje P_a: $P_a \xrightarrow{f} P_b \cup \{b\}$
(3): pro $g(b) = c$ je $P_b \cup \{b\} \xrightarrow{g} U_c$, $P_a \xrightarrow{g\circ f} U_c$,
jinak existuje P'_a: $P'_a \xrightarrow{f} P_b$, $P'_a \xrightarrow{g\circ f} U_c$

Příklad. $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{1/x} = \lim_{y\to 0} \mathrm{e}^{y} = 1$.

Příklad. $f(x) = x \sin\frac{1}{x}$, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$
$g(y) = 0$ pro $y \neq 0$, $g(0) = 1$; $\lim_{y\to 0} g(y) = 0$
$(g \circ f)(x) = 1$ pro $x \in \{\frac{1}{k\pi} : k \in \mathbb{Z}\}$, jinak 0
$\lim_{x\to 0}(g \circ f)(x)$ neexistuje.

Poznámka. Podmínka $g(b) = c$ ve větě o limitě složené funkce znamená spojitost funkce g v bodě b.

Spojitost funkcí

Definice. Funkce f je *spojitá v bodě* $a \in D(f)$, pokud ke každému okolí U bodu $f(a)$ existuje okolí V bodu a tak, že $f\big(V \cap D(f)\big) \subset U$. Funkce je *spojitá*, pokud je spojitá v každém bodě svého definičního oboru.

Věta. *Funkce f definovaná v okolí bodu a je v bodě a spojitá právě tehdy, když* $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Poznámka. Podobně spojitosti zleva/zprava.

Příklady. 1) x je spojitá.
2) $\operatorname{sign} x$ je spojitá v bodech $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, není spojitá v bodě 0.
3) *Dirichletova funkce*

$$d(x) = \begin{cases} 1\,, & x \in \mathbb{Q}\,, \\ 0\,, & x \notin \mathbb{Q}\,. \end{cases}$$

není spojitá v žádném bodě.

Věta. *Jsou-li funkce f, g spojité v bodě a, pak platí:*
1) *Funkce $f \pm g$, $f \cdot g$, $|f|$ jsou spojité v a; je-li $g(a) \neq 0$, pak i funkce f/g je spojitá v bodě a.*
2) *Existuje okolí bodu a, na kterém je funkce f omezená.*
3) *Je-li $f(a) > 0$, pak $f > 0$ na některém okolí bodu a.*
4) *Je-li funkce f spojitá v bodě a a funkce g spojitá v bodě $f(a)$, pak funkce $g \circ f$ je spojitá v bodě a.*

Věta. *Polynomy a racionální funkce jsou spojité funkce.*

Věta. *Mocniny, exponenciální, goniometrické a hyperbolické funkce a funkce k nim inverzní jsou spojité.*

Věta. *Spojitá funkce na uzavřeném intervalu nabývá největší a nejmenší hodnoty.*

Věta (o mezihodnotě)**.** *Je-li funkce f spojitá na intervalu I a nabývá-li v něm hodnot m a M, $m < M$, pak v tomto intervalu nabývá všech hodnot z intervalu $\langle m, M\rangle$.*

Důsledky.
1) *Pro spojitou nekonstantní funkci je obrazem intervalu interval (uzavřeného uzavřený).*
2) *Spojitá funkce na intervalu je prostá (má inverzní funkci) právě tehdy, když je ryze monotonní. Inverzní funkce pak je spojitá.*

Posloupnosti

Definice. (Nekonečná) *posloupnost* (reálných čísel) je zobrazení $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

$(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $a_n = f(n)$ je *n-tý člen*
nekonečněrozměrný aritmetický vektor

Příklady.
1) $(2^n)_{n=1}^{\infty} = (2, 4, 8, \dots) = (2 \cdot 2^{n-1})_{n=1}^{\infty}$
$a_n = a_1 q^{n-1}$ … *geometrická* s *kvocientem* q.
2) $(1, 3, 5, 7, \dots) = (1 + 2(n-1))_{n=1}^{\infty}$
$a_n = a_1 + (n-1)d$ … *aritmetická* s *diferencí* d.
3) $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$: $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 11, \dots)$
(*Fibonacciho*)

Definice. *Vybraná posloupnost* (podposloupnost) z posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost $(a_{k_n})_{n=1}^{\infty}$, kde $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel.

Poznámka. Limita posloupnosti je limita funkce v hromadném bodě $+\infty$ definičního oboru (lze také uvažovat $f(x) = a_n$ pro $x \in \langle n, n+1)$.)

Poznámka. $a_n = f(n)$, $k_n = g(n)$: $a_{k_n} = (f \circ g)(n)$.

Definice. Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má *limitu* $a \in \overline{\mathbb{R}}$ (značíme $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$), pokud pro každé okolí U bodu a existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n > n_0$ je $a_n \in U$.

Definice. Číslo $a \in \overline{\mathbb{R}}$ je *hromadná hodnota posloupnosti*, pokud v každém okolí a leží nekonečně mnoho jejích členů.

Příklad. Posloupnost $\big((-1)^n\big)_{n=1}^{\infty}$ má hromadné hodnoty ± 1.

Tvrzení. *Limita posloupnosti je hromadnou hodnotou posloupnosti. Hromadná hodnota posloupnosti je limitou některé vybrané posloupnosti.*

Věta. *Každá posloupnost má v $\overline{\mathbb{R}}$ alespoň jednu hromadnou hodnotu (omezená posloupnost vlastní).*

Tvrzení. *Supremum a infimum množiny hromadných hodnot posloupnosti jsou hromadné hodnoty této posloupnosti, značíme je* $\limsup_{n\to\infty} a_n$ (limes superior) *a* $\liminf_{n\to\infty} a_n$ (limes inferior).

Věta. *Pro posloupnost je ekvivalentní:*
1) *Má limitu.*
2) *Má jedinou hromadnou hodnotu.*
3) *Limes inferior a limes superior posloupnosti jsou stejné.*
4) *Každá vybraná posloupnost má stejnou limitu.*

Věta. $\lim_{x\to a} f(x) = b$ *právě tehdy, když* $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = b$ *pro každou posloupnost* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *čísel z* $D(f)\setminus\{a\}$ *s* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Příklad. $\lim_{x\to+\infty} \sin x$ neexistuje:
$\lim_{n\to\infty} \sin \pi n = 0$, $\lim_{n\to\infty} \pi n = +\infty$,
$\lim_{n\to\infty} \sin(\frac{\pi}{2} + 2\pi n) = 1$, $\lim_{n\to\infty}(\frac{\pi}{2} + 2\pi n) = +\infty$.

Derivace funkce

„Okamžitá“ změna funkce jako limita průměrných změn.

Definice. *Derivace funkce* f *v bodě* a je

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a) = f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}\,.$$

Poznámky.
1)
$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\,.$$
2) Derivace funkce v bodě může být vlastní nebo nevlastní.
3) Podobně jednostranné derivace.

Příklad. Pro funkci $f(x) = \sqrt[3]{x}$ je

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h} - \sqrt[3]{0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = \left|\frac{1}{0+}\right| = +\infty\,.$$

Definice. Funkce f má *derivaci* na intervalu I, pokud má derivaci v každém vnitřním bodě I a příslušné jednostranné v případných krajních bodech I. Derivace je opět funkce, značíme ji f'.

Tvrzení.

1)	$(c)' = 0$	$x \in \mathbb{R}$ ($c \in \mathbb{R}$ je konstanta).
2)	$(x^a)' = ax^{a-1}$	$x \in \mathbb{R}$ (pro $a \in \mathbb{N}$),
		$x \neq 0$ (pro $a \in \mathbb{Z}$),
		$x > 0$ (pro $a \in \mathbb{R}$).
3)	$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$	$x \in \mathbb{R}$.
4)	$(\sin x)' = \cos x$	$x \in \mathbb{R}$.
5)	$(\cos x)' = -\sin x$	$x \in \mathbb{R}$.

Důkaz:
1) $(c)' = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$.
2) pro $a \in \mathbb{N}$:
$(x^n)' = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[(x+h)^n - x^n\right] =$
$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(x^n + nx^{n-1}h + \cdots + h^n - x^n\right) =$
$= \lim_{h\to 0}(nx^{n-1} + \cdots + h^{n-1}) = nx^{n-1}$
3) $(\mathrm{e}^x)' = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\mathrm{e}^{x+h} - \mathrm{e}^x\right) =$
$= \lim_{h\to 0} \mathrm{e}^x \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} = \mathrm{e}^x \cdot 1 = \mathrm{e}^x$
4) $(\sin x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} =$
$= \lim_{h\to 0} \frac{2\cos(x+h/2)\sin h/2}{h} =$
$= \lim_{h\to 0} \cos(x + h/2)\,\frac{\sin h/2}{h/2} = \cos x \cdot 1 = \cos x$.
$(\cos x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} =$
$= \lim_{h\to 0} \frac{-2\sin(x+h/2)\sin h/2}{h} =$
$= -\lim_{h\to 0} \sin(x + h/2)\,\frac{\sin h/2}{h/2} = -\sin x \cdot 1 = -\sin x$.

Příklady.
1) $(x^3)' = 3x^{3-1} = 3x^2$, $x \in \mathbb{R}$.
2) $(\sqrt[3]{x}\,)' = (x^{1/3})' = \frac{1}{3}\,x^{1/3-1} = 1/\left(3\sqrt[3]{x^2}\right)$, $x \neq 0$.

Věta. *Funkce je spojitá v každém bodě, ve kterém má vlastní derivaci.*

Důkaz: $f(x) = f(a) + \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \cdot (x-a) \xrightarrow{x\to a}$
$f(a) + f'(a) \cdot 0 = f(a)$.

Příklady.
1) $\operatorname{sign} x$ je nespojitá v 0,
$\operatorname{sign}'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sign} h - \operatorname{sign} 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{|h|} = \left|\frac{1}{0+}\right| = +\infty$.
2) $f(x) = |x|$ je spojitá v 0, $f'(0)$ neexistuje: $f'_{\pm}(0) =$
$= \lim_{h\to 0\pm} \frac{|h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0\pm} \pm 1 = \pm 1$.
3) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ je spojitá v 0, $f'(0) = +\infty$.

Věta (o derivaci součtu, rozdílu, součinu a podílu)**.** *Jsou-li* f, g *funkce, které mají vlastní derivace v bodě* a*, pak:*
1) $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$*;*
2) $(f \cdot g)'(a) = f'(a)\,g(a) + f(a)\,g'(a)$*;*
3) *je-li* $g(a) \neq 0$*, pak*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)\,g(a) - f(a)\,g'(a)}{g(a)^2}\,.$$

Důkaz:

$$\frac{(f\pm g)(x) - (f\pm g)(a)}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \pm \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \xrightarrow{x\to a} f'(a) \pm g'(a)\,;$$

$$\frac{(f\cdot g)(x) - (f\cdot g)(a)}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot g(x) + f(a)\cdot\frac{g(x)-g(a)}{x-a} \xrightarrow{x\to a} f'(a)\,g(a) + f(a)\,g'(a)\,;$$

$$\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(a)}{x-a} = \frac{1}{g(a)\,g(x)}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot g(a) - f(a)\cdot\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right] \xrightarrow{x\to a} \frac{1}{g(a)^2}\left[f'(a)\,g(a) - f(a)\,g'(a)\right].$$

Poznámky.
1) Podobně pro derivaci (funkci).
2) Pro $c \in \mathbb{R}$ je $(cf)' = (c)'f + cf' = cf'$ („derivace násobku je násobek derivace“).
3) Zobrazení $'\colon f \to f'$ je lineární.
4) $(f_1 + f_2 + \cdots + f_n)' = f_1' + f_2' + \cdots + f_n'$,
$(f_1 f_2 \cdots f_n)' = f_1' f_2 \cdots f_n + f_1 f_2' \cdots f_n + \cdots + f_1 f_2 \cdots f_n'$.

Příklady.
1) $(3x^2 + 2x)' = 6x + 2$.
2) $(x^2\,\mathrm{e}^x \sin x)' = 2x\,\mathrm{e}^x \sin x + x^2\,\mathrm{e}^x \sin x + x^2\,\mathrm{e}^x \cos x$.
3) $(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x\,(\cos x)'}{\cos^2 x} =$
$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Věta (o derivaci složené funkce)**.** *Má-li* f *vlastní derivaci v* a*,* g *vlastní derivaci v* $f(a) = b$*, pak* $g \circ f$ *má v* a *derivaci*

$$(g\circ f)'(a) = g'(b)\cdot f'(a)\,.$$

Důkaz: Označme $f(x) = y$. Funkce

$$t(y) = \begin{cases} \frac{g(y)-g(b)}{y-b}\,, & y \neq b\,, \\ g'(b)\,, & y = b\,, \end{cases}$$

je spojitá v b, v okolí b je $g(y) - g(b) = t(y)\,(y-b)$, platí

$$\begin{aligned} \frac{(g\circ f)(x) - (g\circ f)(a)}{x-a} &= \frac{g\big(f(x)\big) - g\big(f(a)\big)}{x-a} = \\ &= \frac{g(y)-g(b)}{x-a} = \frac{t(y)\,(y-b)}{x-a} = \\ &= t(y)\,\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow{x\to a} g'(b)\,f'(a)\,. \end{aligned}$$

Poznámky.
1) Schematicky pro $f(x) = y$, $g(y) = z$: $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.
2) $(f_n \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1)' = f_n' \cdots f_2' f_1'$.

Příklady.
1) $(\sin x^2)' = \cos x^2 \cdot 2x$.
2) $(\cosh x)' = \big(\frac{1}{2}\,(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})\big)' = \frac{1}{2}\,(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}) = \sinh x$.
3) $(\mathrm{e}^{\cos x^2})' = \mathrm{e}^{\cos x^2}\cdot(-\sin x^2)\cdot 2x$.

Poznámka.

$$(\mathrm{e}^{ax})' = a\,\mathrm{e}^{ax}\,, \qquad \begin{aligned}(\sin ax)' &= a\cos ax\,,\\ (\cos ax)' &= -a\sin ax\,.\end{aligned}$$

Derivací $(f_{-1}\circ f)(x) = x$ dostaneme $f_{-1}'\big(f(x)\big)\cdot f'(x) = 1$.

Věta (o derivaci inverzní funkce)**.** *Je-li funkce f spojitá a ryze monotonní na otevřeném intervalu I a existuje-li nenulová derivace funkce f v $a \in I$, pak*

$$f_{-1}'\big(f(a)\big) = \frac{1}{f'(a)}\,.$$

Důkaz: Označme $y = f(x)$, $b = f(a)$. $f(I)$ je otevřený interval, existuje spojitá f_{-1} na $f(I)$.

$$\frac{f_{-1}(y) - f_{-1}(b)}{y-b} = \frac{1}{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}} \xrightarrow{y\to b} \frac{1}{f'(a)}\,.$$

Poznámka. Obvykle vycházíme z funkce, jejíž derivaci chceme spočítat, takže podmínky monotonie a nenulovosti derivace ověřujeme pro inverzní funkci.

Příklad. $\ln x$ je inverzní k e^y, která je spojitá, rostoucí a má nenulovou derivaci. Pro $x > 0$ ($x \in D(\ln)$) je

$$(\ln x)' = \frac{1}{(\mathrm{e}^y)'} = \frac{1}{\mathrm{e}^y} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\ln x}} = \frac{1}{x}\,.$$

Tvrzení.

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{x^2+1}\,,\ (\operatorname{arccotg} x)' = \frac{-1}{x^2+1}\,,\quad x \in \mathbb{R}$$
$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}},\ x \in (-1,1)$$

Příklady. 1) $(x^a)' = \big(\mathrm{e}^{a\ln x}\big)' = \mathrm{e}^{a\ln x}\cdot\frac{a}{x} = ax^{a-1}$.
2) $(x^a)' = \big(\mathrm{e}^{x\ln a}\big)' = \mathrm{e}^{x\ln a}\cdot\ln a = x^a\ln a$.

Definice. *Derivaci řádu n (n-tou derivaci)* funkce f značíme $f^{(n)}$ nebo $\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x}$ a definujeme rekurentně

$$f^{(0)} = f\,, \qquad f^{(n)} = \big(f^{(n-1)}\big)' \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}\,.$$

Příklad. Pro $f(x) = 1/x = x^{-1}$ dostáváme

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-1)x^{-2}\,,\\ f''(x) &= \big((-1)x^{-2}\big)' = (-1)(-2)x^{-3}\,,\\ f'''(x) &= \big((-1)(-2)x^{-3}\big)' = (-1)(-2)(-3)x^{-4}\,,\\ &\vdots\\ f^{(n)}(x) &= (-1)^n\,\frac{n!}{x^{n+1}}\,. \end{aligned}$$

Poznámky.
1) Derivace řádu n je lineární zobrazení, takže

$$(f_1 + f_2 + \cdots + f_k)^{(n)} = f_1^{(n)} + f_2^{(n)} + \cdots + f_k^{(n)}.$$

2) Derivace součinu dvou funkcí se počítají následovně:

$$\begin{aligned} (fg)' &= f'g + fg'\,,\\ (fg)'' &= (f'g + fg')' = f''g + 2f'g' + g''\,,\\ (fg)''' &= f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + g'''\,,\\ &\vdots\\ (fg)^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(n-k)}g^{(k)}\,. \end{aligned}$$

Aplikace derivací

Geometrické aplikace

$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ … směrnice sečny body $[a, f(a)]$, $[x, f(x)]$
$f'(a)$ … směrnice tečny v $[a, f(a)]$
tečna:

$$\begin{aligned} y - f(a) &= f'(a)\,(x-a)\\ y &= f(a) + f'(a)\,(x-a) = T_1(x) \end{aligned}$$

směrový vektor tečny (kolmý k normále): $\big(1, f'(a)\big)$
normála:

$$\begin{aligned} x + f'(a)\,y &= a + f'(a)\,f(a)\\ x &= a\,, && \text{pro } f'(a) = 0\,,\\ y &= f(a) - \frac{1}{f'(a)}\,(x-a) && \text{pro } f'(a) \neq 0\,. \end{aligned}$$

Příklad. Určete tečnu a normálu grafu funkce $f(x) = \mathrm{e}^x$ v bodě [1,?].
$f(1) = \mathrm{e}$, $f'(x) = \mathrm{e}^x$, $f'(1) = \mathrm{e}$
tečna: $y = f(1) + f'(1)\,(x-1) = \mathrm{e} + \mathrm{e}(x-1) = \mathrm{e}x$
normála: $y = \mathrm{e} + \mathrm{e}(x-1) = -\frac{1}{\mathrm{e}}\,x + (\mathrm{e} + \mathrm{e}^{-1})$

Věty o střední hodnotě

Věta (Rolleova)**.** *Nechť pro funkci f platí*
(1) *f je spojitá na intervalu $\langle a,b\rangle$,*
(2) *f má derivaci v každém bodě intervalu (a,b),*
(3) *$f(a)=f(b)$.*
Pak $f'(c)=0$ pro některý bod $c\in(a,b)$.

Důkaz: pro konstantní je $f'=0$ na (a,b);
nekonstantní nabývá minima nebo maxima uvnitř $\langle a,b\rangle$;
například pro maximum v bodě $c\in(a,b)$:
$f'(c)=f'_-(c)=\lim_{h\to0-}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\geq 0$,
$f'(c)=f'_+(c)=\lim_{h\to0+}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\leq 0$.

Příklady.
1) Funkce $f(x)=x$ na $\langle0,1)$, $f(1)=0$ nesplňuje (1).
2) Funkce $f(x)=|x|$ na $\langle-1,1\rangle$ nesplňuje (2).
3) Funkce $f(x)=x$ na $\langle0,1\rangle$ nesplňuje (3).

Věta (Lagrangeova, o přírůstku funkce)**.** *Nechť f je spojitá na $\langle a,b\rangle$ a má derivaci v každém bodě (a,b). Pak existuje $c\in(a,b)$ tak, že*

$$f(b)-f(a)=f'(c)\cdot(b-a)\,.$$

Důkaz: funkce $g(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,(x-a)$ splňuje podmínky Rolleovy věty, existuje $c\in(a,b)$:
$0=g'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Tvrzení. *Je-li funkce f spojitá v bodě a zprava a existuje-li $f'(a+)$, pak*

$$f'_+(a)=f'(a+)\,.$$

Důkaz: podle Lagrangeovy věty pro $x>a$ taková, že $(a,x)\subset D(f)$, existuje $c_x\in(a,x)$; pro $x\to a+$ je $c_x\to a+$;
$f'_+(a)=\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a+}f'(c_x)=f'(a+)$

Poznámka. Podobně pro derivaci zleva, oboustrannou.

Věta (Cauchyova)**.** *Nechť funkce f,g jsou spojité na intervalu $\langle a,b\rangle$, mají vlastní derivaci na (a,b) a $g'\neq0$ na (a,b). Pak existuje $c\in(a,b)$ tak, že*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}\,.$$

Důkaz: funkce $h(x)=\big(f(b)-f(a)\big)\,g(x)-\big(g(b)-g(a)\big)\,f(x)$ splňuje podmínky Rolleovy věty, existuje $c\in(a,b)$:
$0=h'(c)=\big(f(b)-f(a)\big)\,g'(c)-\big(g(b)-g(a)\big)\,f'(c)$,
protože $g'\neq0$ na intervalu (a,b), je $g'(c)\neq0$ a také $g(b)\neq g(a)$

l'Hospitalovo pravidlo

Věta (l'Hospitalovo pravidlo)**.** *Nechť pro funkce f,g platí:*
(1) $\lim_{x\to a+}f(x)=\lim_{x\to a+}g(x)=0$ *nebo*
$\lim_{x\to a+}|g(x)|=+\infty$,
(2) *existuje* $\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}\in\overline{\mathbb{R}}$.
Pak

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

Důkaz: pro $\lim_{x\to a+}f(x)=\lim_{x\to a+}g(x)=0$:
uvažujme $x>a$ takové, aby f',g' existovaly na (a,x) a $g'\neq0$, položme $f(a)=g(a)=0$; podle Cauchyovy věty pro interval $\langle a,x\rangle$ existují $c_x\in(a,x)$, tj. pro $x\to a+$ je $c_x\to a+$:
$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}\xrightarrow{x\to a+}\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

Poznámky.
1) Podobně pro limitu zleva či oboustrannou.
2) L'Hospitalovo pravidlo lze použít opakovaně.

Příklady.
1) $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\left|\frac{0}{0}\right|\overset{\text{l'H}}{=}\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}}{1}=1$.
2) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x}=\left|\frac{+\infty}{+\infty}\right|\overset{\text{l'H}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{1}=+\infty$.
3) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x^2}=\left|\frac{+\infty}{+\infty}\right|\overset{\text{l'H}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{2x}=$
$=\left|\frac{+\infty}{+\infty}\right|\overset{\text{l'H}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{2}=+\infty$.
4) $\lim_{x\to0+}x\ln x=|0\cdot(-\infty)|=\lim_{x\to0+}\frac{\ln x}{1/x}=$
$=\left|\frac{-\infty}{+\infty}\right|\overset{\text{l'H}}{=}\lim_{x\to0+}\frac{1/x}{-1/x^2}=\lim_{x\to0+}(-x)=0$.
5) $\lim_{x\to+\infty}(1+1/x)^x=\exp[\lim_{x\to+\infty}x\ln(1+1/x)]=$
$=\exp\big[\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+1/x)}{1/x}\big]=$
$\overset{\text{l'H}}{=}\exp\big[\lim_{x\to+\infty}\frac{1/(1+1/x)\cdot(-1)/x^2}{-1/x^2}\big]$
$=\exp[\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+1/x}]=\exp1=\mathrm{e}$.

Poznámka. Pokud limita podílu derivací neexistuje, nelze l'Hospitalovo pravidlo použít, ale neznamená to, že limita podílu funkcí neexistuje: $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=\left|\frac{\text{omez.}}{+\infty}\right|=0$, ale limita podílu derivací $\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{1}$ neexistuje.

Poznámka. L'Hospitalovo pravidlo lze použít i pro výpočet limit posloupností, pokud najdeme vhodnou funkci. Například $\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^n/n=\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x/x=0$.

Taylorův polynom

Věta (Taylorova)**.** *Nechť funkce f má spojité derivace až do řádu $n\geq0$ v $\langle a,x\rangle$, $f^{(n+1)}$ existuje v (a,x). Pak existuje $c\in(a,x)$ tak, že*

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\\+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\,.$$

Taylorův polynom funkce f v bodě a řádu n … $T_n(x)$, *zbytek v Lagrangeově tvaru.*

Poznámky.
1) Podobně pro $\langle x,a\rangle$.
2) $n=0$: $f(x)=f(a)+f'(c)\,(x-a)$ (Lagrange).
3) $x=a+h$: $f(a+h)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}\,h+\cdots$
4) $f^{(n+1)}$ spojitá, x blízko a … c blízko a … $f^{(n+1)}(c)$ blízko $f^{(n+1)}(a)$ … T_{n+1} přesnější

Důkaz:

$$\begin{aligned} T_n(a) &= f(a) \\ T_n'(a) &= f'(a) \\ &\vdots \\ T_n^{(n)}(a) &= f^{(n)}(a) \end{aligned}$$

$$f(x) = T_n(x) + M(x-a)^{n+1}$$
$$g(t) = f(t) - T_n(t) - M(t-a)^{n+1}, \qquad t \in \langle a, x\rangle$$

Rolle $(n+1)$-krát:

$$\begin{array}{rlll} & g(x) = 0 & g(a) = 0 \\ \exists\, c_1 \in (a,x): & g'(c_1) = 0 & g'(a) = 0 \\ \exists\, c_2 \in (a,c_1): & g''(c_2) = 0 & g''(a) = 0 \\ & \vdots & \\ \exists\, c_n \in (a,c_{n-1}): & g^{(n)}(c_n) = 0 & g^{(n)}(a) = 0 \\ \exists\, c \in (a,c_n): & g^{(n+1)}(c) = 0 & \end{array}$$

$$f^{(n+1)}(c) - 0 - M \cdot (n+1)! = 0$$
$$M = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

Příklad.

$$\cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$
$$\sin x \sim x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

Poznámka. Taylorův polynom sudé (liché) funkce v bodě 0 je funkce sudá (lichá).

Příklad. Spočtěte číslo e s přesností 10^{-3}, víte-li, že $\mathrm{e} < 3$.
$f(x) = \mathrm{e}^x$, $a = 0$, $x = 1$
$f^{(k)}(x) = \mathrm{e}^x$, $f^{(k)}(0) = 1$
$T_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$
chyba $\left|\frac{\mathrm{e}^c}{(n+1)!}\,1^{n+1}\right| \le \frac{3}{(n+1)!} < 10^{-3}$ pro $n \ge 6$
$\mathrm{e} = f(1) \doteq T_6(1) = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{6!} = 2{,}718\,0\overline{5}$
chyba 0,000 226 …, odhad chyby 0,000 595 …

Průběh funkce

Monotonie a extrémy

Věta (o monotonii)**.** *Je-li funkce f spojitá v intervalu I a má-li v každém vnitřním bodě I derivaci, pak:*
1) Je-li $f' > 0$ uvnitř I, pak f je rostoucí v I.
2) Je-li $f' < 0$ uvnitř I, pak f je klesající v I.
3) Je-li $f' \ge 0$ uvnitř I, pak f je neklesající v I.
4) Je-li $f' \le 0$ uvnitř I, pak f je nerostoucí v I.

Důkaz: $x, y \in I$, $x < y$
Lagrange: $f(x) - f(y) = f'(c)\,(x-y)$, $c \in (x,y)$
1) $f(x) - f(y) < 0$ … $f(x) < f(y)$ … rostoucí
2)–4) podobně

Poznámky.
1) Je-li $f' = 0$ na intervalu, pak f je konstantní.
2) Je-li $f' = g'$ na intervalu, pak f, g se liší o konstantu.

Příklad. $f(x) = x^3 - 3x + 1$
$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$
$f' > 0$ na $(-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$ … f rostoucí na $(-\infty,-1\rangle$, $\langle 1,+\infty)$
$f' < 0$ na $(-1,1)$ … f klesající na $\langle -1,1\rangle$

Příklad. $f(x) = x^3$
$f'(x) = 3x^2$
$f' > 0$ na $(-\infty,0), (0,+\infty)$
… f rostoucí na $(-\infty,0\rangle, \langle 0,+\infty)$ … rostoucí na $\mathbb{R}$

Tvrzení. *Je-li $f'(a) > 0$, pak existuje okolí U bodu a tak, že pro $x, y \in U$, $x < a < y$, je $f(x) < f(a) < f(y)$ (f je rostoucí v bodě a).*

Důkaz:

$$0 < f'(a) = \begin{cases} \lim_{x\to a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}, & f(x) > f(a) \text{ vpravo} \\ \lim_{x\to a-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}, & f(x) < f(a) \text{ vlevo} \end{cases}$$

Poznámky.
1) $f'(a) < 0$ … f je klesající v bodě a.
2) Pro $f'(a) = 0$ se nic netvrdí.

Definice. Funkce f má v bodě a *ostré lokální minimum* (*ostré lokální maximum*), jestliže pro některé prstencové okolí P bodu a platí $f(x) > f(a)$ ($f(x) < f(a)$) pro každé $x \in P$.

Poznámky.
1) *Ostrý lokální extrém*: ostré lok. minimum nebo ostré lok. maximum.
2) (Neostré) lokální extrémy: neostré nerovnosti.

Věta. *Má-li funkce f v bodě a lokální extrém, pak buď $f'(a)$ neexistuje nebo $f'(a) = 0$.*

Důkaz: $f'(a) > 0$ … rostoucí v a … není lokální extrém
$f'(a) < 0$ … klesající v a … není lokální extrém

Příklad. $f(x) = x^3 - 3x + 1$ (viz dříve)
$f'(x) = 3x^2 - 3$, existuje všude, nulová v ± 1
$f(-1) = 3$ … ostré lokální maximum
$f(1) = -1$ … ostré lokální minimum

Příklad. $f(x) = |x|$
$f'(x) = \operatorname{sign} x$ pro $x \ne 0$, $f'(0)$ neexistuje
$f(0) = 0$ ostré lokální minimum

Příklad. $f(x) = x^3$
$f'(x) = 3x^2$ existuje všude, nulová v 0
$f(0) = 0$ není lokální extrém

Věta. *Nechť $f'(a) = 0$.*
1) Je-li $f''(a) > 0$, pak f má v a ostré lokální minimum.
2) Je-li $f''(a) < 0$, pak f má v a ostré lokální maximum.

Důkaz: 1) $f''(a) > 0$ … f' rostoucí v a … $f'(x) < f'(a) = 0 < f'(y)$ pro $x < a < y$ v některém okolí … f klesající vlevo, rostoucí vpravo … v a ostré lok. minimum
2) podobně nebo přechodem k $-f$

Příklad. $f(x) = x^3 - 3x + 1$ (viz dříve)
$f'(x) = 3x^2 - 3$, $x_{1,2} = \pm 1$, $f''(x) = 6x$
$f''(-1) = -6 < 0$ … ostré lokální maximum
$f''(1) = 6 > 0$ … ostré lokální minimum

Příklad. $f(x) = x^3$
$f'(x) = 3x^2$, $x_{1,2} = 0$, $f''(x) = 6x$
$f''(0) = 0$ … kritérium nerozhodne, l. e. není

Příklad. $f(x) = x^4$
$f'(x) = 4x^3$, $x_{1,2,3} = 0$, $f(0) = 0$ ostré lok. minimum
$f''(x) = 12x^2$, $f''(0) = 0$ … kritérium nerozhodne
$f^{(3)}(x) = 24x$, $f^{(3)}(0) = 0$
$f^{(4)}(x) = 24$, $f^{(4)}(0) = 24 > 0$

Poznámka. Pro $f'(a) = \cdots = f^{(2n-1)}(a) = 0$:
1) $f^{(2n)}(a) > 0$ … ostré lokální minimum,
2) $f^{(2n)}(a) < 0$ … ostré lokální maximum.

Věta. *Spojitá funkce na uzavřeném intervalu nabývá maxima (minima) buď v bodě, ve kterém má lokální maximum (minimum), nebo v některém krajním bodě intervalu.*

Důkaz: extrém ve vnitřním bodě je lokální.

Důsledek. *Funkce na uzavřeném omezeném intervalu nabývá extrému buď v některém krajním bodě nebo v bodě, kde má nulovou derivaci, nebo v bodě, ve kterém nemá derivaci.*

Příklad. $f(x) = x^2 + 2x$ na $\langle -2, 1\rangle$.
$f'(x) = 2x + 2$, stacionární bod: $x_1 = -1$
hodnoty: $f(-1) = -1$, $f(-2) = 0$, $f(1) = 3$
$\min f = f(-1) = -1$, $\max f = f(1) = 3$

Konvexita, konkavita, inflexní body

Konvexita: 1) spojnice grafu nad grafem, 2) graf nad tečnou, 3) směrnice sečen roste:

Definice. Funkce f je *konvexní* na intervalu I, jestliže pro každé $x, y, z \in I$, $x < y < z$, platí

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \le \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

(*konkávní* pro $\ge$, *ryze konv.* pro $<$, *ryze konk. pro* $>$).

Věta. *Je-li f spojitá na intervalu I a má-li vlastní druhou derivaci všude uvnitř I, pak:*
1) Je-li $f'' \ge 0$ uvnitř I, pak f je konvexní.
2) Je-li $f'' \le 0$ uvnitř I, pak f je konkávní.

Důkaz: 1) $x < y < z$: f' je neklesající, Lagrange … existují $c \in (x, y)$, $d \in (y, z)$:

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c) \le f'(d) = \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

Poznámka. Podobně pro ostré nerovnosti s „ryze“.

Poznámka. Je-li f' rostoucí (klesající, nerostoucí, neklesající), pak f je ryze konvexní (ryze konkávní, konkávní, konvexní).

Definice. Bod $[a, f(a)]$ je *inflexním bodem* grafu funkce f (funkce f má v bodě a *inflexi*), pokud je funkce f spojitá v bodě a, existuje $f'(a)$ a funkce f je na některém jednostranném okolí a ryze konvexní a na některém jednostranném okolí a ryze konkávní.

Věta.
1) *Má-li f v a inflexi, pak $f''(a)$ neexistuje nebo $f''(a) = 0$.*
2) *Je-li $f''(a) = 0$, $f'''(a) \ne 0$, pak f má v a inflexi.*

Poznámka. $f''(a) = \cdots = f^{(2n)}(a) = 0$, $f^{(2n+1)}(a) \ne 0$ … inflexe v a.

Příklad. $f(x) = x^3 - 3x + 1$
$f'(x) = 3x^2 - 3$, $f''(x) = 6x$, $x_1 = 0$
$f'''(x) = 6$, $f'''(0) \ne 0$ … 0 je inflexní bod
nebo: $f'' < 0$ pro $x < 0$, $f'' > 0$ pro $x > 0$

Asymptoty

$f(x) \sim px + q$

Definice. *Asymptota* grafu funkce f v bodě $a \in \{\pm\infty\}$ je přímka o rovnici $y = px + q$ taková, že:

$$\lim_{x \to a} \big(f(x) - px - q\big) = 0\,.$$

Má-li funkce f v bodě $a \in \mathbb{R}$ alespoň jednu jednostrannou limitu nevlastní, nazýváme přímku o rovnici $x = a$ *asymptotou* grafu funkce f v bodě a.

Příklad. $f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}x$
$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
$\lim_{x \to 1\pm} f(x) = \pm\infty$ … $x = 1$ je asymptota v 1
$\lim_{x \to \pm\infty} \big(f(x) - \frac{1}{2}x\big) = 0$ … $y = \frac{1}{2}x$ je asymptota v $\pm\infty$

Tvrzení. *Funkce f má v $a \in \{\pm\infty\}$ asymptotu o rovnici $y = px + q$ právě tehdy, když*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{x} = p\,, \quad \lim_{x \to a} \big(f(x) - px\big) = q\,.$$

Příklad. $f(x) = x \sin x$
$\lim_{x \to \infty} f(x)/x = \lim_{x \to \infty} \sin x$ neex. … as. v $+\infty$ neex.

Příklad. $f(x) = x^2$
$\lim_{x \to \infty} f(x)/x = \lim_{x \to \infty} x = +\infty$ … as. v $+\infty$ neex.

Příklad. $f(x) = \ln x$
$\lim_{x \to \infty} (\ln x)/x = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$ (l'H)
$\lim_{x \to \infty} (\ln x - 0x) = +\infty$ … as. v $+\infty$ neex.

Příklad. $f(x) = x + |x| + 1 + \frac{1}{x-1}$
$\lim_{x \to 2\pm} = \pm\infty$ … asymptota $x = 1$
$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$
$\lim_{x \to +\infty} \big(f(x) - 2x\big) = 1$ … asymptota $y = 2x + 1$ v $+\infty$
$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$ … asymptota $y = +1$ v $-\infty$

Poznámka. $p = \lim_{x \to \pm\infty} f'(x)$ (l'Hospital), pokud ex.

Příklad. $f(x) = \frac{1}{x} \sin x^2$
$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ … asymptota $y = 0$ v $+\infty$
$\lim_{x \to \infty} f'(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 \cos x^2 - \sin x^2}{x^2} = \lim_{x \to \infty} 2 \cos x^2$
… neex.

Shrnutí vyšetřování průběhu funkce

1) f: definiční obor, spojitost, limity v krajních bodech $D(f)$, v bodech nespojitosti, asymptoty, sudost, lichost, perioda
2) f': monotonie, (lokální) extrémy, obor hodnot, tečny grafu v krajních bodech $D(f)$, $D(f')$, v bodech nespojitosti.
3) f'': konvexita/konkavita, inflexní body (včetně tečen).
4) Graf.

Příklad. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3|x|$

Příklad. $f(x) = \frac{x^2}{(x+1)^2}$

Neurčitý integrál

Definice. Funkce F se nazývá *primitivní funkce* k funkci f na otevřeném intervalu I, jestliže $F' = f$ na I.

Poznámky.
1) V krajních bodech lze jednostranné derivace.
2) Lze zobecnit: na sjednocení intervalů; $F' = f$ až na konečnou (či jinou) množinu.
3) Ne všechny funkce mají primitivní.

Věta (vlastnost mezihodnoty pro derivaci)**.** *Nechť f je derivací F na intervalu I, $a, b \in I$, $f(a) < d < f(b)$. Pak existuje c mezi (a, b) tak, že $f(c) = d$.*

Důkaz: $G(x) = F(x) - dx$ má vlastní derivaci … je spojitá … nabývá minima v c … $G'(a) < 0 < G'(b)$, tj. c mezi (a, b) … $G'(c) = 0$ … $f(c) = d$

Příklad. $\operatorname{sign} x$ není derivací žádné funkce.

Věta. *Spojitá funkce na intervalu má primitivní funkci.*

Poznámka. Primitivní funkce k e^{x^2} existuje, ale nelze ji vyjádřit pomocí elementárních funkcí.

Věta.
1) *Je-li F primitivní funkce k f na I, $c \in \mathbb{R}$, pak $F + c$ je primitivní funkce k f na I.*
2) *Jsou-li F_1, F_2 primitivní funkce k f na I, pak $F_1 - F_2$ je konstantní na I.*

Důkaz:
1) $(F + c)' = F' + 0 = F' = f$
2) $(F_1 - F_2)' = F_1' - F_2' = f - f = 0$ … $F_1 - F_2$ je konstantní na I

Poznámka. Na disjunktních intervalech mohou být konstanty různé.

Příklad. $f(x) = \operatorname{sign} x$, $x \neq 0$

$$F(x) = \begin{cases} -x + c_1\,, & x < 0 \\ x + c_2\,, & x > 0 \end{cases}$$

Definice. Množinu všech primitivních funkcí k funkci f na I (pokud alespoň jedna existuje) nazýváme *neurčitým integrálem* f.

$$\int f = \int f(x)\ \mathrm{d}x = \{F + c\colon\ c \in \mathbb{R}\} = F + c$$

Tvrzení.

$$\int x^a\ \mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c\,, \qquad x \in \mathbb{R} \text{ pro } a \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$
$$x > 0\ (x < 0),\ a \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$$
$$x > 0 \text{ pro } a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + c\,, \qquad x > 0,\ x < 0$$

$$\int \mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + c\,, \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\int \sin x\ \mathrm{d}x = -\cos x + c\,, \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\int \cos x\ \mathrm{d}x = \sin x + c\,, \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + c\,, \qquad x \in \mathbb{R}$$

Věta (linearita)**.** *Jsou-li $F_1, \ldots, F_n$ primitivní funkce k $f_1, \ldots, f_n$ na I, $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$, pak $c_1F_1 + \cdots + c_nF_n$ je primitivní funkce k $c_1f_1 + \cdots + c_nf_n$ na I.*

Důkaz:
$(c_1F_1 + \cdots + c_nF_n)' = c_1F_1' + \cdots + c_nF_n' = c_1f_1 + \cdots + c_nf_n$

Věta (integrace per partes)**.** *Nechť na intervalu I existují u', v', $\int u'v$. Pak (na I)*

$$\int uv' = uv - \int u'v\,.$$

Důkaz: $(uv - \int u'v)' = u'v + uv' - u'v = uv'$.

Příklad. $\int (x+1)\sin x\ \mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = x+1 & v' = \sin x \\ u' = 1 & v = -\cos x \end{vmatrix} =$
$= -(x+1)\cos x - \int -\cos x\ \mathrm{d}x = -(x+1)\cos x + \sin x + c$,
$x \in \mathbb{R}$

Poznámka. Podobně $P(x)\ \mathrm{e}^{ax}$, $P(x)\sin ax$, $P(x)\cos ax$ (P polynom, $a \neq 0$).

Příklad. $I = \int \mathrm{e}^x \sin x\ \mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = \mathrm{e}^x & v' = \sin x \\ u' = \mathrm{e}^x & v = -\cos x \end{vmatrix} =$
$= -\mathrm{e}^x \cos x + \int \mathrm{e}^x \cos x\ \mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = \mathrm{e}^x & v' = \cos x \\ u' = \mathrm{e}^x & v = \sin x \end{vmatrix} =$
$= -\mathrm{e}^x \cos x + \mathrm{e}^x \sin x - I$
$I = \frac{1}{2}\ \mathrm{e}^x(\sin x - \cos x) + c$, $x \in \mathbb{R}$

Poznámka. Podobně $\mathrm{e}^{ax}\sin bx$, $\mathrm{e}^{ax}\cos bx$.

Příklad. $\int \ln x\ \mathrm{d}x = \int \ln x \cdot 1\ \mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = \ln x & v' = 1 \\ u' = \frac{1}{x} & v = x \end{vmatrix} =$
$= x\ln x - \int 1\ \mathrm{d}x = x(\ln x - 1) + c$, $x \in (0, \infty)$

Poznámka. Podobně $x^a \ln x$ ($a \neq -1$).

Věta (substituce). *Nechť* $(\alpha,\beta) \xrightarrow{\varphi} (a,b) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, φ' *existuje na* (α,β), f *má primitivní funkci* F *na* (a,b).
1)

$$\int f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = F\big(\varphi(t)\big) + c.$$

2) *Je-li* $\varphi\colon (\alpha,\beta) \xrightarrow{\text{na}} (a,b)$ *ryze monotonní a existuje-li primitivní funkce* G *k* $f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)$ *na* (α,β), *pak*

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = G\big(\varphi_{-1}(x)\big) + c.$$

Důkaz: 1) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F\big(\varphi(t)\big) = F'\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t) = f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t)$.
2) $F\big(\varphi(t)\big)$ je primitivní k $f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t)$, existuje $c\in\mathbb{R}$ tak, že $G(t)+c = F\big(\varphi(t)\big)$. Existuje $\varphi_{-1}(x)$, $G\big(\varphi_{-1}(x)\big)+c = (F\circ\varphi)\big(\varphi_{-1}(x)\big) = F(x)$ je primitivní k f.

Používáme (v obou směrech) zápis:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \left|\begin{matrix} x=\varphi(t) \\ \mathrm{d}x=\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\end{matrix}\right| = \int f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

Příklady.
1) $\int \sin^3 t\cdot\cos t\,\mathrm{d}t = \left|\begin{matrix}\sin t = x \\ \cos t\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x\end{matrix}\right| = \int x^3\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^4 + c = \frac{1}{4}\sin^4 t + c$, $x\in\mathbb{R}$
2) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left|\begin{matrix} x=\sin t \\ \mathrm{d}x=\cos t\,\mathrm{d}t\end{matrix}\right| = \int \mathrm{d}t = t + c = \arcsin x + c$, $x\in(-1,1)$, $t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

Poznámky.
1) $\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \left|\begin{matrix} ax+b=t \\ a\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t\end{matrix}\right| = \frac{1}{a}F(ax+b)+c$ $(a\neq 0)$.
2) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{matrix} f(x)=t \\ f'(x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t\end{matrix}\right| = \ln|f(x)| + c$.

Integrace racionálních funkcí

Rozklad racionální funkce

Definice. *Racionální* (lomená) *funkce* je podíl dvou polynomů. *Parciální* (částečné) *zlomky* jsou funkce ve tvaru

$$\frac{A}{(x-a)^n}\,,\quad \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}\,,\qquad A,B,a,p,q\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N},$$

kde (x^2+px+q) nemá reálný kořen, tj. $p^2-4q<0$.

Poznámka. V $\mathbb{C}$ jen první typ.

Věta. *Každý nenulový polynom lze napsat ve tvaru*

$$a(x-a_1)^{k_1}\cdots(x-a_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\cdots(x^2+p_sx+q_s)^{l_s},$$

kde $r,s\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $k_1,\dots,k_r,l_1,\dots,l_s\in\mathbb{N}$,
$a,a_1,\dots,a_r,p_1,\dots,p_s,q_1,\dots,q_s\in\mathbb{R}$,
$x^2+p_sx+q_s$ *nemají reálné kořeny.*

Věta. *Každá racionální funkce se dá (jednoznačně) rozložit na součet polynomu a parciálních zlomků. Jmenovatelé těchto zlomků dělí jmenovatel dané racionální funkce.*

Postup:
1) Částečné dělení (polynom + ryze lomená funkce).
2) Rozklad jmenovatele na součin kořenových činitelů a ireducibilních kvadratických polynomů.
3) Rozepsání na parciální zlomky s „neurčitými koeficienty“.
4) Určení koeficientů (metoda neurčitých koeficientů, zakrývací pravidlo).

Integrace parciálních zlomků

1) kořenový činitel ve jmenovateli:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^n} = \left|\begin{matrix} x-a=t \\ \mathrm{d}x=\mathrm{d}t\end{matrix}\right| = \int\frac{\mathrm{d}t}{t^n}$$

2) ireducibilní polynom ve jmenovateli:

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)+\big(B-\frac{Ap}{2}\big)}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x$$

2.a) v čitateli derivace ireducibilního polynomu:

$$\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{matrix} x^2+px+q=t \\ (2x+p)\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t\end{matrix}\right| = \int\frac{\mathrm{d}t}{t^n}$$

2.b) v čitateli konstanta:

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)^n} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{[(x+p/2)^2+(q-p^2/4)]^n} = \\ &= \frac{1}{(q-p^2/4)^n}\int \frac{\mathrm{d}x}{\Big[\Big(\frac{x+p/2}{\sqrt{q-p^2/4}}\Big)^2+1\Big]^n} \\ &= \left|\begin{matrix}\frac{x+p/2}{\sqrt{q-p^2/4}}=t \\ \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{q-p^2/4}}=\mathrm{d}t\end{matrix}\right| = \\ &= \frac{1}{(q-p^2/4)^{n-1/2}}\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^n}\end{aligned}$$

pro $n>1$ upravíme

$$\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^n} = \int\frac{1}{(t^2+1)^{n-1}}\,\mathrm{d}t + \int\frac{-t^2}{(t^2+1)^n}\,\mathrm{d}t$$

poslední integrál upravíme per partes

$$\begin{aligned}&= \left|\begin{matrix} u=t & v'=\frac{-2t}{2(t^2+1)^n} \\ u'=1 & v=\frac{1}{2(n-1)(t^2+1)^{n-1}}\end{matrix}\right| \\ &= \frac{t}{2(1-n)(t^2+1)^{n-1}} - \int\frac{\mathrm{d}t}{2(n-1)(t^2+1)^{n-1}}\end{aligned}$$

… postupně snižujme mocninu.

Poznámka. Dostaneme rekurentní vzorec

$$I_n = \frac{t}{2(n-1)(t^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\,I_{n-1}\,,\qquad n>1\,,$$
$$I_1 = \operatorname{arctg} t + c\,.$$

Integrace dalších typů funkcí

1) $\int R(\mathrm{e}^{ax})\ \mathrm{d}x$ $(a \neq 0)$:

$$\int R(\mathrm{e}^{ax})\ \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} \mathrm{e}^{ax} = t \\ x = \frac{1}{a}\ln t \\ \mathrm{d}x = \frac{1}{at}\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int R(t)\,\frac{1}{at}\,\mathrm{d}t$$

$$x \in \mathbb{R}\,,\ t \in (0, +\infty)$$

2) $\int R(\sin x, \cos x)\ \mathrm{d}x$:

$$\sin x = 2\sin\tfrac{x}{2}\cos\tfrac{x}{2} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2} + 1}$$

$$\cos x = \cos^2\tfrac{x}{2} - \sin^2\tfrac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - \mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}}{\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2} + 1}$$

$$\int R(\sin x, \cos x)\ \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} \mathrm{tg}\,\frac{x}{2} = t \\ x = 2\,\mathrm{arctg}\,t \\ \mathrm{d}x = \frac{2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \end{array} \right| =$$

$$= \int R\left(\frac{2t}{t^2+1}, \frac{1-t^2}{t^2+1}\right)\frac{2}{t^2+1}\ \mathrm{d}t$$

$$x \in (-\pi, \pi)\,,\ t \in \mathbb{R}$$

2a) „sudé mocniny“: $\int R(\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x \cos x)\ \mathrm{d}x$
$(R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x))$

$$\sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{\mathrm{tg}^2\,x}{\mathrm{tg}^2\,x + 1}$$

$$\cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{1}{\mathrm{tg}^2\,x + 1}$$

$$\sin x \cos x = \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{\mathrm{tg}\,x}{\mathrm{tg}^2\,x + 1}$$

$$\int R(\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x \cos x)\ \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} \mathrm{tg}\,x = y \\ x = \mathrm{arctg}\,t \\ \mathrm{d}x = \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \end{array} \right|$$

$$x \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2})\,,\ t \in \mathbb{R}$$

„lichá“ v sin nebo v cos:

2b) $$\int R(\sin^2 x, \cos x)\sin x\ \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} \cos x = t \\ -\sin x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ \sin^2 x = 1 - t^2 \end{array} \right|$$

2c) $$\int R(\sin x, \cos^2 x)\cos x\ \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} \sin x = t \\ \cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ \cos^2 x = 1 - t^2 \end{array} \right|$$

2d) $\int \sin^n x \cdot \cos^m x\ \mathrm{d}x$: pro liché m či n viz 2b), 2c);
pro sudá m, n přechod k dvojnásobnému argumentu

$$\sin^2 x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x)\,, \qquad \cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

3) $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\ \mathrm{d}x$, $ad - bc \neq 0$:

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\ \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{r} \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t \\ x = R_1(t) \\ \mathrm{d}x = R_1'(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right| =$$

$$= \int R\big(R_1(t), t\big)\,R_1'(t)\ \mathrm{d}t$$

4) $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$, $a \neq 0$: vytknutím a, doplněním na čtverec a lineární substitucí upravíme na integrál ve tvaru $\int R(x, \sqrt{\pm x^2 \pm a^2})$, $a > 0$. Lze použít goniometrické, Eulerovy nebo hyperbolické substituce.

4a) $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})\ \mathrm{d}x$, $x \in (-a, a)$:

- $x = a\sin t$, $\mathrm{d}x = a\cos t\,\mathrm{d}t$, $\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos t$, $t \in \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$;
- $x = a\cos t$, $\mathrm{d}x = -a\sin t\,\mathrm{d}t$, $\sqrt{a^2 - x^2} = a\sin t$, $t \in \in (0, \pi)$;
- upravíme $\sqrt{a^2 - x^2} = (a + x)\sqrt{(a - x)/a + x}$ a použijeme substituci pro typ 3) (Eulerova substituce).

4b) $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2})\ \mathrm{d}x$, $x \in (-\infty, -a)$, $x \in (a, +\infty)$:

- $x = a/(\sin t)$, $\mathrm{d}x = (-a\cos t)/(\sin^2 t)\,\mathrm{d}t$, $\sqrt{x^2 - a^2} = = (a\cos t)/|\sin t|$, $t \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$, $t \in (0, \frac{\pi}{2})$;
- $x = a/(\cos t)$, $\mathrm{d}x = (a\sin t)/(\cos^2 t)\,\mathrm{d}t$, $\sqrt{x^2 - a^2} = = (a\sin t)/|\cos t|$, $t \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, $t \in (0, \frac{\pi}{2})$;
- $\sqrt{x^2 - a^2} + x = t$, $x = R_2(t)$, $\mathrm{d}x = R_2'(t)\,\mathrm{d}t$ (Eulerova substituce).
- $x = a\cosh t$, $\mathrm{d}x = a\sinh t\,\mathrm{d}t$, $\sqrt{x^2 + a^2} = a|\sinh t|$, $t \in (-\infty, 0)$, $t \in (0, +\infty)$.

4c) $\int R(x, \sqrt{x^2 + a^2})\ \mathrm{d}x$, $x \in \mathbb{R}$:

- $x = a\,\mathrm{tg}\,t$, $\mathrm{d}x = a/\cos^2 t\,\mathrm{d}t$, $\sqrt{x^2 + a^2} = a/\cos t$, $t \in \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$;
- $x = a\,\mathrm{tg}\,t$, $\mathrm{d}x = -a/\sin^2 t\,\mathrm{d}t$, $\sqrt{x^2 + a^2} = a/\sin t$, $t \in \in (0, \pi)$;
- $\sqrt{x^2 + a^2} + x = t$, $x = R_2(t)$, $\mathrm{d}x = R_2'(t)\,\mathrm{d}t$ (Eulerova substituce).
- $x = a\sinh t$, $\mathrm{d}x = a\cosh t\,\mathrm{d}t$, $\sqrt{x^2 + a^2} = a\cosh t$, $t \in \in \mathbb{R}$.

Určitý integrál

Definice. *Dělení intervalu* $\langle a, b\rangle$ je konečná množina $D \subset \subset \langle a, b\rangle$ obsahující a, b.

Značíme $D = \{x_0, \ldots, x_n\}$, $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.

Definice. Pro omezenou funkci f na $\langle a,b\rangle$ a dělení D intervalu $\langle a,b\rangle$ zavádíme *dolní* a *horní integrální součet*:

$$\underline{S}(f,D)=\sum_{i=1}^{n}\inf f\langle x_{i-1},x_i\rangle\cdot(x_i-x_{i-1})$$
$$\bar{S}(f,D)=\sum_{i=1}^{n}\sup f\langle x_{i-1},x_i\rangle\cdot(x_i-x_{i-1})$$

Definice. D' je *zjemnění* D, jestliže $D'\supset D$.

$\underline{S}(f,D)\le\underline{S}(f,D')\le\bar{S}(f,D')\le\bar{S}(f,D)$

Tvrzení. *Jsou-li D_1,D_2 dělení intervalu $\langle a,b\rangle$, f omezená funkce na $\langle a,b\rangle$, pak*
$(b-a)\inf f\le\underline{S}(f,D_1)\le\bar{S}(f,D_2)\le(b-a)\sup f$.

Důkaz: $D_0=\{a,b\}$
$(b-a)\inf f=\underline{S}(f,D_0)\le\underline{S}(f,D_1)\le\underline{S}(f,D_1\cup D_2)\le$
$\le\bar{S}(f,D_1\cup D_2)\le\bar{S}(f,D_2)\le\bar{S}(f,D_0)\le(b-a)\sup f$

Definice. Je-li supremum dolních součtů rovno infimu horních součtů pro funkci f na $\langle a,b\rangle$, nazýváme tuto hodnotu *určitým (Riemannovým) integrálem* funkce f na $\langle a,b\rangle$.

Označení: $\int_a^b f$, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, (R)–$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$
a … *dolní mez*, b … *horní mez*, f … *integrand*

Poznámka. $D^*=D\cup\{c_1,c_2,\dots,c_n\}$, $c_i\in(x_{i-1},x_i)$
$S(f,D^*)=\sum_{i=1}^n f(c_i)\cdot(x_i-x_{i-1})$
$\sigma(D^*)=\max\{x_i-x_{i-1}\colon i=1,\dots,n\}$
$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\sigma(D^*)\to0}S(f,D^*)$

Věta. *Pro omezenou funkci f na $\langle a,b\rangle$ existuje $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ právě tehdy, když existuje posloupnost $(D_n)_{n=1}^\infty$ dělení intervalu $\langle a,b\rangle$ taková, že*

$$\lim_{n\to\infty}\underline{S}(f,D_n)=\lim_{n\to\infty}\bar{S}(f,D_n)\,.$$

V takovém případě je integrál roven těmto limitám.

Důkaz: $\Rightarrow$:
existuje $(D'_n)_{n=1}^\infty$: $\underline{S}(f,D'_n)\xrightarrow{n\to\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$,
existuje $(D''_n)_{n=1}^\infty$: $\bar{S}(f,D''_n)\xrightarrow{n\to\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$,
$\underline{S}(f,D'_n)\le\underline{S}(f,D'_n\cup D''_n)\le\bar{S}(f,D'_n\cup D''_n)\le\bar{S}(f,D''_n)$,
$(D'_n\cup D''_n)_{n=1}^\infty$ je hledaná posloupnost dělení;
$\Leftarrow$:
$\sup_D\underline{S}(f,D)\ge\lim_{n\to\infty}\underline{S}(f,D_n)=$
$=\lim_{n\to\infty}\underline{S}(f,D_n)\ge\inf_D\bar{S}(f,D)\ge\sup_D\underline{S}(f,D)$,
všude rovnosti

Příklad. $\int_a^b c\,\mathrm{d}x=c(b-a)$
$\underline{S}(c,D_n)=\bar{S}(c,D_n)=c\sum_{i=1}^n(x_i-x_{i-1})=c(b-a)$

Příklad. $\int_0^1 x\,\mathrm{d}x=\frac12$:
$D_n=\{0,\frac1n,\frac2n,\dots,1\}$
$\underline{S}(f,D_n)=\sum_{i=1}^n\frac{i-1}{n}\cdot\frac1n=\frac{n^2-n}{2n^2}\xrightarrow{n\to\infty}\frac12$
$\bar{S}(f,D_n)=\sum_{i=1}^n\frac{i}{n}\cdot\frac1n=\frac{n^2+n}{2n^2}\xrightarrow{n\to\infty}\frac12$

Příklad. $\int_0^1\operatorname{sign}x\,\mathrm{d}x=1$:
$D_n=\{0,\frac1n,1\}$
$\underline{S}(f,D_n)=\frac{n-1}{n}\xrightarrow{n\to\infty}1$, $\bar{S}(f,D_n)=1$

Příklad. $\int_0^1 d(x)\,\mathrm{d}x$ neex. ($d(x)=1$ pro $x\in\mathbb{Q}$, jinak 0):
$\underline{S}(f,D)=0$, $\bar{S}(f,D)=1$

Poznámka. Hodnota Riemannova integrálu nezáleží na hodnotách funkce v konečně mnoha bodech. Hodnota obecnějšího Lebesgueova integrálu (dělení v oboru hodnot) nezáleží na hodnotách ve spočetně mnoha bodech: (L)–$\int_0^1 d(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 0\,\mathrm{d}x=0$.

Věta. *$\int_a^b f$ existuje, pokud platí některá z podmínek:*
1) *f je spojitá funkce na $\langle a,b\rangle$.*
2) *f je monotonní funkce na $\langle a,b\rangle$.*

Důkaz: 2) $D_n=\{a,a+\frac{b-a}{n},\dots,b\}$
$\underline{S}(f,D_n)=\sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\cdot\frac{b-a}{n}$
$\bar{S}(f,D_n)=\sum_{i=1}^n f(x_i)\cdot\frac{b-a}{n}$
$\bar{S}(f,D_n)-\underline{S}(f,D_n)=\frac{b-a}{n}\cdot\big|f(b)-f(a)\big|\xrightarrow{n\to\infty}0$

Věta. *Nechť $\int_a^b f$, $\int_a^b g$ existují, $c\in\mathbb{R}$. Pak:*
1) $\int_a^b(f+g)=\int_a^b f+\int_a^b g$,
2) $\int_a^b cf=c\int_a^b f$,
3) *je-li $f\le g$ na $\langle a,b\rangle$, pak* $\int_a^b f\le\int_a^b g$,
4) $\big|\int_a^b f\big|\le\int_a^b|f|$.

Důkaz: 1) $\inf\{f(x)+g(x)\colon x\in I\}\ge\inf f(I)+\inf g(I)$,
$\underline{S}(f+g,D)\ge\underline{S}(f,D)+\underline{S}(g,D)$,
$\sup_D\underline{S}(f+g,D)\ge\int_a^b f+\int_a^b g$,
podobně $\inf_D\bar{S}(f+g,D)\le\int_a^b f+\int_a^b g$
protože $\sup_D\underline{S}(f+g,D)\le\inf_D\bar{S}(f+g,D)$, dostaneme rovnosti;

2) $c\ge0$: $\underline{S}(cf,D)=c\underline{S}(f,D)$, $\bar{S}(cf,d)=c\bar{S}(f,D)$,
$\sup\underline{S}(-f,D)=\sup-\bar{S}(f,D)=-\inf\bar{S}(f,d)=-\int_a^b f$,
$\inf\bar{S}(-f,D)=\inf-\underline{S}(f,D)=-\sup\underline{S}(f,d)=-\int_a^b f$;

3) $\underline{S}(f,D)\le\underline{S}(g,D)\ \dots\ \sup\{\underline{S}(f,D)\}\le\sup\{\underline{S}(g,D)\}$;

4) $-|f|\le f\le|f|\ \dots\ -\int_a^b|f|\le\int_a^b f\le\int_a^b|f|$ (bez ex.)

Poznámka. Určitý integrál je lineární zobrazení na množině integrovatelných funkcí, $\int_a^b\colon R(a,b)\to\mathbb{R}$.

Věta. *Nechť $a<b<c$. Pak $\int_a^c f$ existuje právě tehdy, když existují $\int_a^b f$ a $\int_b^c f$. V takovém případě platí*

$$\int_a^c f=\int_a^b f+\int_b^c f\,.$$

Důkaz: D_1 dělení $\langle a,b\rangle$, D_2 dělení $\langle b,c\rangle$,
$D=D_1\cup D_2$ je dělení $\langle a,c\rangle$ obsahující b,
$\underline{S}(f,D_1)+\underline{S}(f,D_2)=\underline{S}(f,D)$,
$\bar{S}(f,D_1)+\bar{S}(f,D_2)=\bar{S}(f,D)$,
suprema a infima dostaneme jako vhodné limity:
$\sup_{D_1}\underline{S}(f,D_1)+\sup_{D_2}\underline{S}(f,D_2)=\sup_D\underline{S}(f,D)$,
$\inf_{D_1}\bar{S}(f,D_1)+\inf_{D_2}\bar{S}(f,D_2)=\inf_D\bar{S}(f,D)$

Poznámka. $\int_a^a f=0$, $\int_b^a f=-\int_a^b f$, výše uvedená věta pro všechna a,b,c.

Poznámka. Lze integrovat i funkce „po částech spojité“, tj. které mají jen konečně mnoho bodů nespojitosti a v nich konečné jednostranné limity. (Podobně pro „po částech monotonní“ funkce.)

Věta. *Nechť* $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *existuje. Pak funkce*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\,, \qquad x \in \langle a, b\rangle$$

má následující vlastnosti:
1) *je spojitá.*
2) $F'(x) = f(x)$ *pro každý bod spojitosti funkce* f.

Důkaz: F je definována (aditivita na definičním oboru)
$F(x+h)-F(x) = \int_a^{a+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t$,
1) $|f| \le M$ na $\langle a, b\rangle$
$|F(x+h)-F(x)| = \left|\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \operatorname{sign} h \int_x^{x+h} |f(t)|\,\mathrm{d}t \le$
$\le \operatorname{sign} h \int_x^{x+h} M\,\mathrm{d}t = M\cdot|h| \xrightarrow{h\to 0(\pm)} 0$,
$\lim_{h\to 0(\pm)} F(x+h) = F(x)$

2) $\left|\frac{1}{h}\big(F(x+h)-F(x)\big) - f(x)\right| =$
$= \left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)\,\mathrm{d}t\right| =$
$= \left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h}\big(f(t)-f(x)\big)\,\mathrm{d}t\right| \le \frac{1}{h}\int_x^{x+h} |f(t)-f(x)|\,\mathrm{d}t \le$
(f spoj. v x: pro $\varepsilon > 0$ je $|f(t)-f(x)| < \varepsilon$ na okolí x)
$\le \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \varepsilon\,\mathrm{d}t = \frac{1}{h}\cdot h\varepsilon = \varepsilon$
$F'(x) = \lim_{h\to 0(\pm)} \frac{1}{h}\big(F(x+h)-F(x)\big) = f(x)$

Důsledek. *Funkce spojitá na intervalu má na tomto intervalu primitivní funkci.*

Důkaz: $a \in I$, $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(x)$.

Poznámka. Pro funkce po částech spojité jsou (v bodech nespojitosti) jednostranné derivace F rovny příslušným jednostranným limitám f.

Příklad. $f(x) = \operatorname{sign} x$

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \left\{ \begin{array}{ll} \int_0^x 1\,\mathrm{d}t = x\,, & x \ge 0 \\ \int_0^x -1\,\mathrm{d}t = -x\,, & x \le 0 \end{array} \right\} = |x|$$

$F'_-(0) = -1 = \lim_{x\to 0-} f(x) = f(0-)$
$F'_+(0) = 1 = \lim_{x\to 0+} f(x) = f(0+)$

Věta (Newtonova–Leibnizova formule)**.** *Jestliže* $\int_a^b f$ *existuje a* F *je primitivní funkce k* f *na* $\langle a, b\rangle$*, pak*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)\,.$$

Důkaz: $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$
$F(b)-F(a) = F(x_n)-F(x_0) = \sum_{i=1}^n \big(F(x_i)-F(x_{i-1})\big) =$
(F spoj., vlastní der., Lagrange … ex. $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$)
$= \sum_{i=1}^n F'(c_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n f(c_i)(x_i - x_{i-1})$

$$\underline{S}(f, D) \le F(b) - F(a) \le \bar{S}(f, D)$$
$$\sup \underline{S}(f, D) \le F(b) - F(a) \le \inf \bar{S}(f, D)$$

Píšeme $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b$.

Příklad. $\int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$.

Příklad (per partes, průběžné dosazování)**.**
$\int_0^\pi x\sin x\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{ll} u = x & v' = \sin x \\ u' = 1 & v = -\cos x \end{array}\right| =$
$= \big[-x\cos x\big]_0^\pi + \int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x = \pi - 0 = \big[\sin x\big]_0^\pi =$
$= \pi + (0 - 0) = \pi$.

Příklady (substituce, přepočet mezí – někdy stejné)**.**
1) $\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{c} x^2+1 = t \\ x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t \end{array}\right| = \int_1^2 \sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{8}-1}{3}$,
2) $\int_0^\pi \sin x\cos x\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{c} \sin x = t \\ \cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array}\right| = \int_0^0 t\,\mathrm{d}t = 0$.

Poznámka. Newtonův integrál:

$$(\mathrm{N})\text{–}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b-) - F(a+)\,.$$

Existuje-li Riemannův i Newtonův integrál, jsou stejné.

Příklady.
1) $f(x) = \operatorname{sign} x$
(R)–$\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, (N)–$\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ neex.
2) $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$,
(R)–$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ ex., (N)–$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ ex.,
F nelze „dobře“ vyjádřit.
3) $f(x) = x^{-1/2}$
(R)–$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ neex., (N)–$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \big[2\sqrt{x}\big]_0^1 = 2$.
4) $f(x) = x^{-2}$
(R)–$\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ neex., (N)–$\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \big[-x^{-1}\big]_1^\infty = 1$.

Nevlastní integrál

Definice. Nechť pro $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$, je $\int_c^d f \in \mathbb{R}$ pro každý interval $\langle c, d\rangle \subset (a, b)$. Pak pokládáme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to a+}\int_c^e f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{d\to b-}\int_e^d f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

pokud je výraz vpravo definován pro některé $e \in (a, b)$.

Poznámka. Výběr e není podstatný, pro e' je:
$\lim_{c\to a+}\int_c^{e'} f = \lim_{c\to a+}\int_c^e f + \int_e^{e'} f$,
$\lim_{d\to b-}\int_{e'}^d f = \lim_{d\to b-}\int_e^d f - \int_e^{e'} f$.

Příklady.
1) $\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = [\operatorname{arctg} x]_{-\infty}^\infty = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi$, konverguje.
2) $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x} = [\ln x]_1^\infty = \infty - 0 = \infty$, existuje.
3) $\int_{-\infty}^\infty \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{1}{2}\big[\ln(1+x^2)\big]_{-\infty}^\infty = \infty - \infty$, neexistuje.

Příklad (per partes)**.**
$\int_0^\infty x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{ll} u = x & v' = \mathrm{e}^{-x} \\ u' = 1 & v = -\mathrm{e}^{-x} \end{array}\right| = \cdots =$
$\big[\mathrm{e}^{-x}(-x-1)\big]_0^\infty = \lim_{x\to\infty}\frac{-x-1}{\mathrm{e}^x} - (-1) = 0 + 1 = 1$.

Příklad (substituce)**.**
$\int_1^\infty x^{-2}\,\mathrm{e}^{-1/x}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{c} -1/x = t \\ x^{-2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array}\right| = \int_{-1}^0 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \big[\mathrm{e}^t\big]_{-1}^0 =$
$= 1 - \mathrm{e}^{-1}$.

Věta. 1) *Jestliže* $|f| \le g$ *na* (a,b), f *je po částech spojitá a* $\int_a^b g$ *konverguje, pak konverguje i* $\int_a^b f$.
2) *Jestliže* $f \le g$ *na* (a,b) *a* $\int_a^b f = +\infty$, *pak* $\int_a^b g = +\infty$.

Příklady.

$$\int_0^1 x^a \,\mathrm{d}x = \begin{cases} [\ln x]_0^1 = 0 - (-\infty) = \infty\,, & a = -1 \\ \left[\frac{x^{a+1}}{a+1}\right]_0^1 = \begin{cases} \frac{1}{a+1} - \frac{\infty}{a+1} = \infty\,, & a < -1 \\ \frac{1}{a+1} - 0 = \frac{1}{a+1}\,, & a > -1 \end{cases} \end{cases}$$

$$\int_1^\infty x^a \,\mathrm{d}x = \begin{cases} [\ln x]_1^\infty = \infty - 0 = \infty\,, & a = -1 \\ \left[\frac{x^{a+1}}{a+1}\right]_1^\infty = \begin{cases} \infty - \frac{1}{a+1} = \infty\,, & a > -1 \\ 0 - \frac{1}{a+1} = \frac{-1}{a+1}\,, & a < -1 \end{cases} \end{cases}$$

Tvrzení. *Nechť* P, Q *jsou polynomy,* Q *nemá v* $\langle a, +\infty)$ *kořeny. Pak*

$$\int_a^\infty \frac{P(x)}{Q(x)} \,\mathrm{d}x$$

konverguje právě tehdy, když $\operatorname{st} Q \ge \operatorname{st} P + 2$.

Důkaz: $n = \operatorname{st} P - \operatorname{st} Q$

$\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)\,x^n} = A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, BÚNO $A > 0$

existuje $b > a, 0$ tak, že $\frac{P(x)}{Q(x)\,x^n} \in \left(\frac{1}{2}A, \frac{3}{2}A\right)$ pro $x > b$

$\frac{1}{2}Ax^n < \frac{P(x)}{Q(x)} < \frac{3}{2}Ax^n$

$\int_b^\infty \frac{3}{2}Ax^n$ konv. pro $n < -1$, $\int_b^\infty \frac{1}{2}Ax^n = \infty$ pro $n \ge -1$

$\int_b^\infty \frac{P(x)}{Q(x)}$ a $\int_a^\infty \frac{P(x)}{Q(x)}$ konv. právě pro $n < -1$, tj. $n \le -2$

Příklad. $\int_0^\infty \frac{x^2+4x+5}{x^4+1} \,\mathrm{d}x$ konv., $\int_0^\infty \frac{x^2+4x+5}{x^3+1} \,\mathrm{d}x = +\infty$.

Příklad (Laplaceova transformace)**.** Nechť funkce $f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ je po částech spojitá a má omezený exponenciální růst, tj. existují konstanty $K, a \in \mathbb{R}$ tak, že $|f(t)| \le K\,\mathrm{e}^{at}$. *Laplaceovým obrazem* funkce f je funkce F daná předpisem

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)\,\mathrm{e}^{-pt} \,\mathrm{d}t\,.$$

Definována pro $p > a$ ($\operatorname{Re} p > a$):

$|f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}| \le K\,\mathrm{e}^{(a-p)t}$

$\int_0^\infty K\,\mathrm{e}^{(a-p)t} \,\mathrm{d}t = \left[\frac{K}{a-p}\,\mathrm{e}^{(a-p)t}\right]_0^\infty = 0 - \frac{K}{a-p} = \frac{K}{p-a}$

Příklad (funkce *gama*)**.**

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t\,.$$

1) Integrál konverguje pro $x > 0$: $|t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}| \le t^{x-1}$

$\int_0^1 t^{x-1} \,\mathrm{d}t$ konverguje pro $x - 1 > -1$, tj. $x > 0$

zvolme $n \ge x - 1$, $|t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}| \le t^n\,\mathrm{e}^{-t}$

$\int_1^\infty t^n\,\mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t = (\text{per partes}) = [P_n(t)\,\mathrm{e}^{-t}]_1^\infty =$

$= 0 - P_n(1)\,\mathrm{e}^{-1} \ldots$ konverguje

2) $\Gamma(1) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t = [-\mathrm{e}^{-t}]_0^\infty = 0 - (-1) = 1$

3) $\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x\,\mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t = \left|\begin{matrix} u = t^x & v' = e^{-t} \\ u' = xt^{x-1} & v = -\mathrm{e}^{-t} \end{matrix}\right| =$

$= \left[-t^x\,\mathrm{e}^{-t}\right]_0^\infty + \int_0^\infty xt^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t = x\,\Gamma(x)$

4) $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-2) = \cdots = (n-1)!\,\Gamma(1) = (n-1)!$

Aplikace určitého integrálu

Definice. *Střední hodnota* funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$ je

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x\,,$$

pokud integrál konverguje.

Příklad. Střídavé napětí $u(t) = U_0 \sin\frac{2\pi t}{T}$ má na odporu R okamžitý výkon $p(t) = \frac{1}{R}\,u^2(t) = \frac{U_0^2}{R}\sin^2\frac{2\pi t}{T}$. Jeho střední hodnota (například na intervalu $\langle 0, T\rangle$) je $\frac{U_0^2}{2R}$ což pro stejnosměrný proud odpovídá napětí $U_\mathrm{e} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,U_0$ (*efektivní napětí střídavého proudu*).

Věta (o střední hodnotě)**.** *Spojitá spojitá funkce na uzavřeném intervalu nabývá své střední hodnoty.*

Důkaz:

$$(b-a)\min f\langle a,b\rangle \le \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x \le (b-a)\max f\langle a,b\rangle$$
$$\min f\langle a,b\rangle \le \tfrac{1}{b-a}\textstyle\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x \le \max f\langle a,b\rangle$$

f nabývá všech hodnot mezi $\min f\langle a,b\rangle$ a $\max f\langle a,b\rangle$

Věta. *Nechť* $f \le g$ *jsou po částech spojité funkce definované na* $\langle a,b\rangle$. *Obsah plochy* $\{[x,y]\colon a < x < b,\ f(x) \le y \le g(x)\}$ *je*

$$\int_a^b \big(g(x) - f(x)\big) \,\mathrm{d}x\,.$$

Důkaz (pro uzavřený interval, pak limity): Existují
$(D_{f,k})_{k=1}^\infty$: $\underline{S}(f, D_{f,k}), \bar{S}(f, D_{f,k}) \xrightarrow{k\to\infty} \int_a^b f$,
$(D_{g,k})_{k=1}^\infty$: $\underline{S}(g, D_{g,k}), \bar{S}(g, D_{g,k}) \xrightarrow{k\to\infty} \int_a^b g$,
pro dělení $D_k = D_{f,k} \cup D_{g,k}$:

$$\underline{S}(g, D_k) - \bar{S}(f, D_k) \le P \le \bar{S}(g, D_k) - \underline{S}(f, D_k)$$
$$\textstyle\int_a^b (g - f) \le P \le \int_a^b (g - f)$$

Příklad. Obsah plochy omezené elipsou $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ je $4\int_0^a b\sqrt{1 - (x/a)^2} \,\mathrm{d}x = \pi ab$.

Věta. *Nechť* f *má po částech spojitou derivaci na* (a,b). *Délka grafu funkce* f *je*

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \,\mathrm{d}x\,.$$

Důkaz (pro uzavřený interval, pak limity):
supremum (limita) lineárních lomených aproximací
$l(D) = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2} =$
$= \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f'(c_i)\,(x_i - x_{i-1})]^2} =$
$= \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\,(x_i - x_{i-1})$, $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$

$$\underline{S}(\sqrt{1 + (f')^2}, D) \le l(D) \le \bar{S}(\sqrt{1 + (f')^2}, D)$$
$$\textstyle\int_a^b \sqrt{1 + (f')^2} \le \sup l(D) \le \int_a^b \sqrt{1 + (f')^2}$$

Příklad. Délka astroidy $(x/r)^{2/3} + (y/r)^{2/3} = 1$ je $4\int_0^r \sqrt{1 + [((r^{2/3} - x^{2/3})^{3/2})']^2} \,\mathrm{d}x = 6r$.

Věta. *Nechť f je po částech spojitá funkce na (a,b). Objem tělesa $\{[x,y,z]:\ a<b<a,\ y^2+z^2\le f^2(x)\}$ je*

$$\pi\int_a^b f^2(x)\ \mathrm{d}x\,.$$

Důkaz (pro uzavřený interval, pak limity):

$$\underline{S}(\pi f^2,D)\le V\le \bar{S}(\pi f^2,D)$$
$$\pi\textstyle\int_a^b f^2\le V\le \pi\int_a^b f^2$$

Příklad. Objem kužele ($f(x)=\frac{r}{v}x$ na $\langle 0,v\rangle$) je $\pi\int_0^v r^2x^2/v^2\ \mathrm{d}x=\frac{1}{3}\pi r^2v$.

Příklad. Objem koule ($f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$ na $\langle -r,r\rangle$) je $2\pi\int_0^r(r^2-x^2)\ \mathrm{d}x=\frac{4}{3}\pi r^3$.

Věta. *Nechť f má po částech spojitou derivaci na (a,b). Obsah plochy vzniklé rotací grafu f kolem osy x je*

$$2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\ \mathrm{d}x\,.$$

Důkaz (náznak pro uzavřený interval):
supremum aproximací komolými kuželi
plášť kužele: $\pi s^2\cdot\frac{2\pi r/s}{2\pi}=\pi rs=\frac{\pi}{\sin\alpha}r^2$
komolý kužel: $\frac{\pi}{\sin\alpha}(r_1^2-r_2^2)=2\pi\frac{r_1+r_2}{2}s$
$S(D)=$
$=\sum_{i=1}^n 2\pi f(c_i)\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+[f(x_i)-f(x_{i-1})]^2}=$
$=\sum_{i=1}^n 2\pi f(c_i)\sqrt{1+[f'(c_i')]^2}\,(x_i-x_{i-1})\to$
$\to 2\pi\int_a^b f\sqrt{1+(f')^2}$

Příklad. Obsah sféry ($f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$ na $\langle -r,r\rangle$) je $2\pi\int_{-r}^r\sqrt{r^2-x^2}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)^2}\ \mathrm{d}x=4\pi r^2$.

Fyzikální aplikace

Souřadnice těžiště v rovině:

$$x_{\mathrm{T}}=\frac{M_y}{m}\qquad y_{\mathrm{T}}=\frac{M_x}{m}\,.$$

Věta. *Momenty lineárních útvarů:*

$$M_y=\lambda\int_a^b x\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x\,,$$
$$M_x=\lambda\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Věta. *Momenty plošných útvarů ($f\ge 0$):*

$$M_y=\sigma\int_a^b x\,f(x)\ \mathrm{d}x\,,$$
$$M_x=\frac{\sigma}{2}\int_a^b f^2(x)\ \mathrm{d}x\,.$$

Numerická integrace

$$I=\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x\,,\qquad a,b\in\mathbb{R}\,.$$

Použijeme vhodný odhad střední hodnoty (vážený průměr funkčních hodnot) $w_1f(x_1)+\cdots+w_kf(x_k)$, kde $x_i\in\langle a,b\rangle$ jsou *uzly* a w_i jsou *váhy* ($w_1+\cdots+w_k=1$). Dostaneme

$$I\approx(b-a)\big(w_1f(x_1)+\cdots+w_kf(x_k)\big)\,.$$

Uzly a váhy volíme tak, aby byl co největší *řád* metody, budou se pak integrovat přesně všechny polynomy menšího stupně. Váhy jsou určeny tím, že se vlastně přesně integruje polynomiální interpolace v daných uzlech.

Gaussova metoda

Optimální volba uzlů. Řád metody je dvojnásobek počtu uzlů. Uzly jsou rozmístěny symetricky podle středu intervalu $\langle a,b\rangle$, váhy v symetrických uzlech jsou stejné. Konkrétní hodnoty se počítají komplikovaně, lze je najít v literatuře (obvykle pro interval $\langle -1,1\rangle$, na který se interval $\langle a,b\rangle$ dá převést lineární substitucí). Příklady:
1) $k=1$: $x_1=\frac{1}{2}(a+b)$, $w_1=1$.
2) $k=2$ na $\langle -1,1\rangle$: $x_{1,2}\doteq 0{,}577\,350$, $w_{1,2}=\frac{1}{2}$.

Newtonova–Cotesova metoda

Uzly jsou pro jednoduchost vybrány ekvidistantně, buď včetně krajních bodů a,b (*uzavřená* metoda) nebo bez nich (*otevřená* metoda). Řád metody je nejmenší sudé číslo, které je větší nebo rovno počtu uzlů. Váhy jsou „pěkná“ racionální čísla, v uzlech symetrických podle středu stejné.

Poznámka. Newtonova–Cotesova metoda pro jeden uzel (tedy otevřená) je Gaussova metoda pro jeden uzel.

Složené metody

Při zvětšování počtu uzlů nemusí aproximace spočtené Newtonovou–Cotesovou metodou konvergovat k hodnotě integrálu. Chyba závisí na hodnotách derivace příslušného řádu integrované funkce a ta se může zvětšovat. Konvergenci zajistí *složené* metody: interval $\langle a,b\rangle$ rozdělíme na n podintervalů délek $(b-a)/n=h$ s krajními body $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ a na každém z nich použijeme zvolenou metodu. Výpočty zlepšujeme zvětšováním n.

Obdélníková metoda používá uzavřenou Newtonovu–Cotesovu metodu pro jeden uzel (váha je 1). Součtem přes všechny podintervaly dostaneme

$$R(h)=h\left[f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)+\cdots+f\left(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\right)\right]$$

Věta. *Nechť f má na $\langle a,b\rangle$ spojitou druhou derivaci. Pak*

$$|I-R(h)|\le\frac{M_2}{24}(b-a)h^2\,,\qquad M_2=\max_{x\in\langle a,b\rangle}|f''(x)|\,.$$

Důkaz: Uvažujme interval $\langle x_0, x_1\rangle$, $x_1' = (x_0+x_1)/2$. Podle věty o Taylorově polynomu je

$$f(x) = f(x_1') + f'(x_1')\,(x - x_1') + \frac{f''(c_x)}{2}\,(x - x_1')^2$$

pro některý bod $c_x \in (x_0, x_1)$. Chyba integrace je

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,\mathrm{d}x - h\,f(x_1')\right| = \left|\int_{x_0}^{x_1} \big(f(x) - (x_1')\big)\,\mathrm{d}x\right| \\
&= \left|f'(x_1')\underbrace{\int_{x_0}^{x_1}(x - x_1')\,\mathrm{d}x}_{=0} + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} f''(c_x)\,(x - x_1')^2\,\mathrm{d}x\right| \\
&\le \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} |f''(c_x)|\,(x - x_1')^2\,\mathrm{d}x \le \frac{M_2}{2}\int_{x_0}^{x_1}(x - x_1')^2\,\mathrm{d}x \\
&= \left|\begin{matrix} x - x_1' = t \\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{matrix}\right| = \frac{M_2}{2}\int_{-h/2}^{h/2} t^2\,\mathrm{d}t = M_2\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{h/2} \\
&= \frac{M_2}{12}\,h^3\,.
\end{aligned}$$

Stejný odhad je na ostatních podintervalech, je tedy

$$|I - R(h)| \le \frac{M_2}{24}\,h^3 n = \frac{M_2}{24}\,(b-a)h^2\,.$$

Lichoběžníková metoda používá uzavřenou Newtonovu–Cotesovu metodu pro 2 uzly (váhy jsou 1/2). Součtem přes všechny podintervaly dostaneme

$$T(h) = h\left[\tfrac{1}{2}\,f(a) + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1}) + \tfrac{1}{2}\,f(b)\right]$$

Tvrzení. *Nechť P je lineární interpolace funkce f se spojitou druhou derivací na intervalu $\langle x_0, x_1\rangle$ (tj. P je lineární funkce, $P(x_0) = f(x_0)$, $P(x_1) = f(x_1)$). Pak pro každé $x \in \langle x_0, x_1\rangle$ je*

$$|f(x) - P(x)| \le \frac{M_2}{2}\,|(x - x_0)(x - x_1)|\,.$$

Důkaz: Pro $x \in \{x_0, x_1\}$ dokazovaná nerovnost platí. Pro $x \notin \{x_0, x_1\}$ uvažujme funkci

$$F(t) = f(t) - P(t) - \big(f(x) - P(x)\big)\,\frac{(t - x_0)(t - x_1)}{(x - x_0)(x - x_1)}\,.$$

Funkce F má tři nulové body x_0, x_1, x. Podle Rolleovy věty má F' dva nulové body v (x_0, x_1) a opět podle Rolleovy věty má F'' nulový bod $c_x \in (x_0, x_1)$. Je tedy

$$0 = F''(c_x) = f''(c_x) - 0 - \big(f(x) - P(x)\big)\,\frac{2}{(x - x_0)(x - x_1)}$$

$$\begin{aligned}
f(x) - P(x) &= \frac{f''(c_x)}{2}\,(x - x_0)(x - x_1)\,, \\
|f(x) - P(x)| &\le \frac{M_2}{2}\,|(x - x_0)(x - x_1)|\,.
\end{aligned}$$

Poznámka. Nechť f má spojitou derivaci řádu $n+1$ na intervalu $\langle a, b\rangle$, P je její polynomiální interpolace v bodech $x_0, \ldots, x_n \in \langle a, b\rangle$ (P má stupeň nejvýše n). Pak pro každé $x \in \langle a, b\rangle$ je

$$|f(x) - P(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\,|(x - x_0)\ldots(x - x_n)|\,.$$

Věta. *Nechť f má na $\langle a, b\rangle$ spojitou druhou derivaci. Pak*

$$|I - T(h)| \le \frac{M_2}{12}\,(b-a)h^2\,, \qquad M_2 = \max_{x\in\langle a,b\rangle} |f''(x)|\,.$$

Důkaz: Uvažujme interval $\langle x_0, x_1\rangle$, $x_1' = (x_0+x_1)/2$. Podle předcházejícího tvrzení je

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{x_0}^{x_1} \big(f(x) - P(x)\big)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_{x_0}^{x_1} \big|f(x) - P(x)\big|\,\mathrm{d}x \\
&\le \frac{M_2}{2}\int_{x_0}^{x_1} |(x - x_0)(x - x_1)|\,\mathrm{d}x = \left|\begin{matrix} x - x_1' = t \\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{matrix}\right| \\
&= \frac{M_2}{2}\int_{-h/2}^{h/2}\left(\frac{h^2}{4} - t^2\right)\mathrm{d}t = M_2\left[\frac{h^2}{4}\,t - \frac{1}{3}\,t^3\right]_0^{h/2} \\
&= M_2\left(\frac{h^3}{8} - \frac{h^3}{24}\right) = \frac{M_2}{12}\,h^3\,.
\end{aligned}$$

Stejný odhad je na ostatních podintervalech, je tedy

$$|I - T(h)| \le \frac{M_2}{12}\,h^3 n = \frac{M_2}{12}\,(b-a)h^2\,.$$

Poznámka. Odhad chyby obdélníkové metody je dvakrát menší než u lichoběžníkové metody, přestože se používají horší polynomy. Využívá se totiž střed intervalu, což odpovídá aproximaci tečnou. Při použití (třeba levého) krajního bodu intervalu bychom dostali horší metodu řádu 1.

Simpsonova metoda používá uzavřenou Newtonovu–Cotesovu metodu pro 3 uzly, rozděluje tedy každý podinterval na dva. Pro lepší srovnání označme n (sudý) počet všech takto vzniklých podintervalů délek $(b-a)/n = h$ s krajními body $a = x_0 < x_1, \cdots < x_n = b$. Hodnoty vah dostaneme integrací kvadratické interpolace.

Interpolační polynom uzly $x_0, \ldots x_k$ se dá vyjádřit jako kombinace Lagrangeových polynomů (právě v jednom uzlu hodnota 1, v ostatních 0):

$$\begin{aligned}
P(t) = {} & f(x_0)\,\frac{(t - x_1)\cdots(t - x_k)}{(x_0 - x_1)\cdots(x_0 - x_k)} + \\
& + f(x_1)\,\frac{(t - x_0)(t - x_2)\cdots(t - x_k)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\cdots(x_1 - x_k)} + \cdots + \\
& + f(x_k)\,\frac{(t - x_0)\cdots(t - x_{k-1})}{(x_k - x_0)\cdots(x_k - x_{k-1})}\,.
\end{aligned}$$

Pro kvadratickou interpolaci na $\langle x_0, x_2\rangle$ dostaneme

$$\begin{aligned}
&\int_{x_0}^{x_2} P(x)\,\mathrm{d}x = \left|\begin{matrix} (x - x_1) = ht \\ \mathrm{d}x = h\,\mathrm{d}t \end{matrix}\right| = h\int_{-1}^{1} \tilde{P}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= h\Bigg[f(x_0)\int_{-1}^{1}\frac{t(t-1)}{(-1)(-2)}\,\mathrm{d}t \\
&\quad + f(x_1)\int_{-1}^{1}\frac{(t+1)(t-1)}{1(-1)}\,\mathrm{d}t \\
&\quad + f(x_2)\int_{-1}^{1}\frac{(t+1)t}{2\cdot 1}\,\mathrm{d}t\Bigg] \\
&= h[\tfrac{1}{3}\,f(x_0) + \tfrac{4}{3}\,f(x_1) + \tfrac{1}{3}\,f(x_2)]\,.
\end{aligned}$$

Sečtením přes dvojice podintervalů dostaneme

$$S(h) = \tfrac{h}{3}\,[f(x_0) + 4\,f(x_1) + 2\,f(x_2) + \cdots + 4\,f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

Věta. *Nechť f má na $\langle a,b\rangle$ spojitou čtvrtou derivaci. Pak*

$$|I - S(h)| \le \frac{M_4}{180}\,(b-a)h^4\,, \qquad M_4 = \max_{x\in\langle a,b\rangle} |f^{(4)}(x)|\,.$$

Poznámka. Simpsonova metoda je řádu 4 a je tedy přesná i pro polynomy stupně 3.

Richardsonova extrapolace

Pro metodu F řádu k konvergující k $F(0)$ je

$$F(h) = F(0) + ah^p + O(h^q)\,,$$

kde $a \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{N}$, $q > p$. (Symbol $O(h^q)$ označuje funkci, která se v okolí 0 chová nejhůře jako násobek h^q, tady zahrnuje chyby řádu většího než p.) Uvažujme $h > 0$, $k > 1$ a proložme body $[h^p, F(h)]$ a $[(kh)^p, F(kh)]$ přímku:

$$P(x) = F(h) + \frac{F(kh) - F(h)}{(k^p-1)h^p}\,(x - h^p)\,.$$

Richardsonova extrapolace je

$$F(0) \approx P(0) = F(h) + \frac{F(h) - F(kh)}{k^p - 1} = F_1(h)\,.$$

Příklady. Pro $k = 2$ dostáváme

$$\begin{aligned}
R_1(h) &= R(h) + \tfrac{1}{3}\big(R(h) - R(2h)\big) && \text{řádu } 4\,,\\
T_1(h) &= T(h) + \tfrac{1}{3}\big(T(h) - T(2h)\big) = S(h) && \text{řádu } 4\,,\\
S_1(h) &= S(h) + \tfrac{1}{15}\big(S(h) - S(2h)\big) && \text{řádu } 6\,.
\end{aligned}$$

Protože potřebujeme hodnotu metody v $2h$, potřebujeme pro obdélníkovou a lichoběžníkovou metodu sudá n, pro Simpsonovu metodu n dělitelná 4.

Poznámky.
1) Odstraníme chybu nejnižšího řádu.
2) Přičítaná hodnota dobře odhaduje chybu, což můžeme použít v iteračním postupu: spočteme pro $n = 1$ (pro Simpsonovu metodu pro $n = 2$); opakovaně zdvojnásobujeme počet podintervalů n (pro obdélníkovou a Simpsonovu metodu stačí počítat hodnoty jen v nových bodech) a odhadujeme chybu, dokud nedosáhneme zadané přesnosti.

Rombergova metoda

Začínáme s lichoběžníkovou metodou, při zdvojnásobování počtu podintervalů dopočítáme všechny dostupné Richardsonovy extrapolace v trojúhelníkovém schematu

$$\begin{array}{llll}
T(h) & & & \\
T(\frac{h}{2}) & T_1(\frac{h}{2}) & & \\
T(\frac{h}{4}) & T_1(\frac{h}{4}) & T_2(\frac{h}{4}) & \\
T(\frac{h}{8}) & T_1(\frac{h}{8}) & T_2(\frac{h}{8}) & T_3(\frac{h}{8}) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \quad \ddots
\end{array}$$

a sledujeme výsledky na diagonále. V k-tém sloupci je metoda řádu $2k$.

Příklad. Spočtěte $\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}\;\mathrm{d}x$ s přesností $\varepsilon = 10^{-6}$.

Pro obdélníkovou, lichoběžníkovou a Simpsonovu metodu můžeme využít odhady chyb, ve kterých přepíšeme $h = (b-a)/n$.

$$M_2 = \max_{x\in\langle 0,1\rangle}\left|\frac{\mathrm{e}^{-x^2/2}(x^2-1)}{\sqrt{2\pi}}\right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,,$$
$$M_4 = \max_{x\in\langle 0,1\rangle}\left|\frac{\mathrm{e}^{-x^2/2}(x^4-6x^2+3)}{\sqrt{2\pi}}\right| = \frac{3}{\sqrt{2\pi}}\,.$$

$$\varepsilon > \frac{M_2(b-a)^3}{24n_R^2} \quad n_R > \sqrt{\frac{M_2(b-a)^3}{24\varepsilon}} \doteq 128{,}9 \quad n_R \ge 129$$
$$\varepsilon > \frac{M_2(b-a)^3}{12n_T^2} \quad n_T > \sqrt{\frac{M_2(b-a)^3}{12\varepsilon}} \doteq 182{,}3 \quad n_T \ge 183$$
$$\varepsilon > \frac{M_4(b-a)^5}{180n_S^4} \quad n_S > \sqrt[4]{\frac{M_4(b-a)^5}{180\varepsilon}} \doteq \quad 7{,}2 \quad n_S \ge \quad 8$$

Chyby pro spočtená a nutná dělení jsou uvedeny v tabulce:

metoda	R	T	S
n	129	183	8
$10^9\varepsilon$	−606	602	−660
n	101	143	8
$10^9\varepsilon$	−988	986	−660

Odhady chyb pomocí Richardsonovy extrapolace jsou lepší (musíme použít sudá n):

metoda	R	T	S
n	102	144	8
$10^9\varepsilon$	−969	972	−660
$10^9 \cdot$ odhad chyby	−969	972	−672

Kdybychom postupovali iteračně, skončili bychom pro obdélníkovou i lichoběžníkovou metodu s $n = 128$, pro Simpsonovu metodu s $n = 8$.

Pro Rombergovu metodu dostáváme chyby přibližně

	T	T_1	T_2
$n = 1$	0,021		
$n = 2$	0,005	−0,000 184	
$n = 4$	0,001	−0,000 011	0,000 000 829

Podíl chyb v po sobě jdoucích řádcích je v každém sloupci zhruba 2^p, kde p je řád metody: v prvním sloupci $2^2 = 4$, ve druhém $2^4 = 16$.

Pro Gaussovu metodu dostáváme chyby přibližně

n	1	2	3	4
chyba	$-11\cdot10^{-3}$	$124\cdot10^{-6}$	$-799\cdot10^{-9}$	$3\cdot10^{-9}$

Porovnání jednotlivých metod podle počtu nutných hodnot funkce:

metoda	R	T	S	Rombergova	Gaussova
dělení	101	143	8	4	1
hodnot	101	144	9	5	3

Diferenciální rovnice 1. řádu

(Obyčejná) diferenciální rovnice řádu 1: $F(t,x,x')=0$.
Řešitelná pro derivaci: $x'=f(t,x)$.
Řešení na intervalu I: funkce $x\colon\ I\to\mathbb{R}$ taková, že pro každé $t\in I$ je $x'(t)=f\big(t,x(t)\big)$.
Maximální řešení: neexistuje řešení na větším intervalu.
Cauchyova úloha: navíc *počáteční podmínka* $x(t_0)=x_0$.

$$\boxed{x'=f(t,x)\,,\quad x(t_0)=x_0}$$

Věta. *Je-li f spojitá funkce na $I\times J$ (I,J otevřené intervaly), $t_0\in I$, $x_0\in J$, pak $x'=f(t,x)$, $x(t_0)=x_0$, má řešení na intervalu $I'\subset I$ obsahujícím t_0. Je-li navíc $\frac{\partial f}{\partial y}$ lokálně omezená na $I\times J$, pak je toto řešení jednoznačné.*

Poznámka. Postačují podmínky pro vybrané případy:

$f(t,x)$	f spojitá	$\frac{\partial f}{\partial x}$	$\frac{\partial f}{\partial x}$ lok. om.
$g(t)\,h(x)$	g,h spojité	$g(t)\,h'(x)$	g,h' spojité
$a(t)\,x+b(t)$	a,b spojité	$a(t)$	a spojitá

Poznámka. I' je maximální takový, že graf řešení se „zastaví“ o hranici $I\times J$ nebo o svislou asymptotu.

Separovatelné diferenciální rovnice 1. řádu

$$\boxed{x'=g(t)\,h(x)}$$

Věta. *Nechť g je spojitá funkce na intervalu $I\ni t_0$, h je spojitá funkce na intervalu $J\ni x_0$. Pak $x'=g(t)\,h(x)$, $x(t_0)=x_0$, má řešení na intervalu $I'\subset I$ obsahujícím t_0. Je-li navíc h' spojitá na J, pak je toto řešení jednoznačné.*

Předpoklady: g spojitá na intervalu I, h spojitá na intervalu J.

1) $h(x_1)=0\ \dots\ x(t)=x_1$, $t\in I$ je *stacionární* řešení
2) $h(x)\neq 0$

$$\begin{aligned}
x'(t)&=g(t)\,h\big(x(t)\big)\\
\int\frac{x'(t)}{h\big(x(t)\big)}\,\mathrm{d}t&=\int g(t)\,\mathrm{d}t\\
\int\frac{\mathrm{d}x}{h(x)}&=\int g(t)\,\mathrm{d}t\\
H_1(x)&=G(t)+c\\
x(t)&=\dots
\end{aligned}$$

3) počáteční podmínka: dopočítat c nebo

$$\int_{x_0}^{x(t)}\frac{\mathrm{d}y}{h(y)}=\int_{t_0}^{t}g(u)\,\mathrm{d}u$$

Obecný postup:
1) Maximální intervaly spojitosti g (I).
2) Stacionární řešení $x(t)=x_1$, $t\in I$ pro $h(x_1)=0$.
3) Maximální intervaly spojitosti a nenulovosti h (J).
4) Pro $(t_0,x_0)\in I\times J$, existuje řešení uvnitř $I\times J$.

Příklad. $x'=3x^{2/3}$
$g(t)=1$, $h(x)=3x^{2/3}$ spojité na $\mathbb{R}$ … řešení existuje pro každou počáteční podmínku
$h'(x)=2x^{-1/3}$ spojitá na $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ … jednoznačnost pro $x\neq 0$
stacionární řešení: $x(t)=0$, $t\in\mathbb{R}$
řešení pro $x\neq 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}&=3x^{2/3}\\
\int\frac{1}{3}\,x^{-2/3}\,\mathrm{d}x&=\int\mathrm{d}t\\
x^{1/3}&=t-c\\
x(t)&=(t-c)^3\,,\quad t\in(-\infty,c)\,,\ t\in(c,+\infty)
\end{aligned}$$

Řešení se v bodech nejednoznačnosti dají spojovat, obecné řešení je

$$x_{c,d}=\begin{cases}(t-c)^3\,, & t\le c\,,\\ 0\,, & t\in(c,d)\,,\\ (t-d)^3\,, & t\ge d\,,\end{cases}\qquad -\infty\le c\le d\le+\infty\,.$$

Příklad. $x'=\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{x}{\mathrm{e}^x}$
separace:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}&=\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{x}{\mathrm{e}^x}\\
\int\frac{\mathrm{e}^x}{x}\,\mathrm{d}x&=\int\frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

integrály nelze vyjádřit pomocí elementárních funkcí

Příklad. $x'=\frac{3t^2}{1-t^3}\cdot\frac{x+1}{x-1}$
separace:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}&=\frac{3t^2}{1-t^3}\cdot\frac{x+1}{x-1}\\
\int\frac{x-1}{x+1}\,\mathrm{d}x&=\int\frac{3t^2}{1-t^3}\,\mathrm{d}t\\
x-2\ln|x+1|&=-\ln|1-t^3|+c
\end{aligned}$$

$x(t)$ nelze vyjádřit pomocí elementárních funkcí (je dána *implicitně*)

Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

$$\boxed{x'=a(t)\,x+b(t)}$$

Věta. *Nechť a,b jsou spojité funkce na intervalu $I\ni t_0$, $x_0\in\mathbb{R}$. Pak $x'=a(t)\,x+b(t)$, $x(t_0)=x_0$, má právě jedno řešení na intervalu I.*

Předpoklady: a,b spojité na intervalu I.

(Přidružená) homogenní rovnice: $x'=a(t)\,x$.

Věta. 1) *Jsou-li x_1,x_2 řešení LDR, pak x_1-x_2 je řešení přidružené homogenní rovnice.*
2) *Je-li $\hat{x}$ řešení LDR a $\tilde{x}$ řešení přidružené homogenní rovnice, pak $\hat{x}+\tilde{x}$ je řešení dané LDR.*
3) *Jsou-li x_1,x_2 řešení pro funkce b_1,b_2, pak x_1+x_2 je řešení pro funkci b_1+b_2* (princip superpozice).

Důkaz:

1)
$$\begin{aligned}\big(x_1(t)-x_2(t)\big)' &= x_1'(t)-x_2'(t)\\ &= a(t)\,x_1(t)+b(t)-\big(a(t)\,x_2(t)+b(t)\big)\\ &= a(t)\,\big(x_1(t)-x_2(t)\big)\end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned}\big(\hat{x}(t)+\tilde{x}(t)\big)' &= \hat{x}'(t)+\tilde{x}'(t)\\ &= a(t)\,\hat{x}(t)+b(t)+a(t)\,\tilde{x}(t)\\ &= a(t)\,\big(\hat{x}(t)+\tilde{x}(t)\big)+b(t)\end{aligned}$$

3)
$$\begin{aligned}\big(x_1(t)+x_2(t)\big)' &= x_1'(t)+x_2'(t)\\ &= a(t)\,x_1(t)+b_1(t)+\big(a(t)\,x_2(t)+b_2(t)\big)\\ &= a(t)\,\big(x_1(t)+x_2(t)\big)+\big(b_1(t)+b_2(t)\big)\end{aligned}$$

Obecné řešení: $x(t)=\tilde{x}(t)+\hat{x}(t)$, kde $\tilde{x}$ je obecné řešení přidružené homogenní rovnice a $\hat{x}$ je jedno (*partikulární*) řešení původní rovnice.

Poznámka. Předcházející věta je důsledkem linearity zobrazení
$$D\colon\, x(t)\mapsto x'(t)-a(t)\,x(t)\,.$$
LDR lze pak přepsat do tvaru $D(x)=b$.
Speciálně množina řešení homogenní rovnice je jádro tohoto zobrazení, takže tvoří lineární prostor.

Věta. *Množina řešení homogenní lineární diferenciální rovnice řádu 1 tvoří lineární prostor dimenze 1.*

Homogenní rovnice je separovatelná. Stacionární řešení je $x(t)=0$, $t\in I$. Nestacionární řešení najdeme separací:
$$\begin{aligned}x'(t) &= a(t)\,x(t)\\ \int\frac{x'(t)}{x(t)}\,\mathrm{d}t &= \int a(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Označme A primitivní funkci k a, integrační konstantu vyjádříme ve tvaru $\ln|c|$ pro $c\neq 0$:
$$\begin{aligned}\ln|x(t)| &= A(t)+\ln|c|\\ |x(t)| &= |c|\,\mathrm{e}^{A(t)}\end{aligned}$$

$x(t)$ nemění znaménko (jednoznačnost stacionárního řešení), znaménko může být zahrnuto v konstantě c:
$$x(t)=c\,\mathrm{e}^{A(t)}$$

Stacionární řešení dostaneme, pokud připustíme $c=0$. Obecné řešení je
$$x(t)=c\,\mathrm{e}^{A(t)},\quad t\in I,\qquad (c\in\mathbb{R})\,.$$

Množina řešení tedy tvoří lineární prostor dimenze 1.

Partikulární řešení nehomogenní rovnice najdeme metodou *variace konstanty*: obecné řešení přidružené homogenní rovnice má tvar $\tilde{x}(t)=c\,\mathrm{e}^{A(t)}$, partikulární řešení hledáme ve tvaru $\hat{x}(t)=c(t)\,\mathrm{e}^{A(t)}$. Dosadíme do rovnice a spočítáme $c(t)$:
$$\begin{aligned}c'(t)\,\mathrm{e}^{A(t)}+c(t)\,\mathrm{e}^{A(t)}a(t) &= a(t)\,c(t)\,\mathrm{e}^{A(t)}+b(t)\\ c'(t) &= b(t)\,\mathrm{e}^{-A(t)}\\ c(t) &= \int b(t)\,\mathrm{e}^{-A(t)}\\ \hat{x}(t) &= \mathrm{e}^{A(t)}\cdot\int b(t)\,\mathrm{e}^{-A(t)}\end{aligned}$$

Obecný postup:
1) Obecné řešení přidružené homogenní rovnice separací proměnných: $\tilde{x}(t)=c\,x_1(t)$.
2) Partikulární řešení metodou variace konstanty: $\hat{x}(t)=c(t)\,x_1(t)$, obecné řešení je pak $x(t)=\hat{x}(t)+\tilde{x}(t)$.
3) Určení konstanty dosazením (případné) počáteční podmínky.