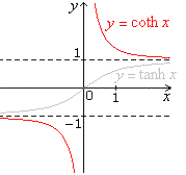
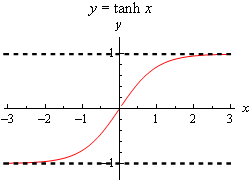
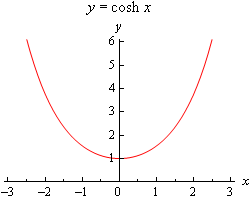
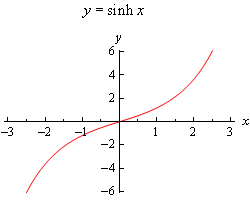
## Reálná čísla

Poznámka: [] odpovídá 〈〉

* rozšířená množina reálných čísel je ℝ̅̅̅̅̅= ℝ ∪ {−∞, +∞}, kde −∞ a +∞ se nazývají *nevlastní čísla*
  + nedefinujeme: ∞−∞, 0·∞, ∞/∞, 1∞, 00, ∞0, 0/0
* intervaly:
  + Pro každé a, b ∈ R, a < b, rozeznáváme tyto typy intervalů s krajními body a, b:
    - (a, b) = {x ∈ R : a < x < b} (otevřený)
    - 〈a, b〉= {x ∈ R : a ≤ x ≤ b} pro a, b ∈ R (uzavřený)
    - (a, b〉 = {x ∈ R : a < x ≤ b} pro b ∈ R (zleva otevřený, zprava uzavřený)
    - 〈a,, b) = {x ∈ R : a ≤ x < b} pro a ∈ R (zleva uzavřený, zprava otevřený)
    - body intervalu, které nejsou krajní, nazýváme *vnitřní*
* okolí bodu:
  + *okolí bodu* *a* ∈ ℝ o poloměru r>0 je U(a, r) = {x ∈ ℝ: |x−a|<r} = (a−r, a+r).
  + *prstencové okolí bodu a* ∈ ℝ o poloměru r>0 je P(a, r) = U(a, r) \ {a} = (a-r, a) ∪ (a, a+r).
  + okolí bodů ±∞ jsou
    - U(−∞, r) = P(−∞, r) = {x ∈ ℝ: x < r} = (−∞, r)
    - U(+∞, r) = P(+∞, r) = {x ∈ ℝ: x > r} = (r, +∞)
* omezenost:
  + Nechť M ⊂ ℝ. Číslo k ∈ ℝ se nazývá:
    - *horní mez* množiny M, pokud x ≤ k pro každé x ∈ M
    - *dolní mez* množiny M, pokud x ≥ k pro každé x ∈ M
  + Množina M se nazývá:
    - *shora omezená*, pokud má horní mez
    - *zdola omezená*, pokud má dolní mez
    - *omezená*, pokud má horní i dolní mez.
* maximum, minimum, supremum, infimum, jejich existence:
  + Věta: Každá množina reálných čísel má supremum i infimum.
  + Nechť M ⊂ ℝ je neprázdná:
    - *supremum* množiny M (sup M) je nejmenší horní mez množiny M (+∞ pro shora neomezenou množinu)
    - *infimum* množiny M (inf M) je největší dolní mez množiny M (−∞ pro zdola neomezenou množinu M)
  + sup ∅ = −∞, inf ∅ = +∞
  + max M (min M) existuje právě tehdy, když sup M ∈ M (inf M ∈ M)
    - jestliže existuje maximum (minimum) množiny, pak je zároveň supremem (infimem) této množiny
* princip vnořených intervalů:
  + Jsou-li In (n ∈ ℕ) uzavřené intervaly a I1 ⊃ I2 ⊃ · · · , pak ∩n∈N In≠∅. Jestliže navíc délky intervalů In klesají k nule, pak je tento průnik jednobodový.
  + **Důkaz:** Označme In = [an, bn] pro každé n ∈ ℕ. Z předpokladů vyplývá, že a1 ≤ a2 ≤ a3 ≤ · · · ≤ b3 ≤ b2 ≤ b1. Množina {an: n ∈ ℕ} je neprázdná, shora omezená každým číslem bn, má tedy v ℝ supremum, označme ho a. Protože a ≤ bn pro každé n ∈ ℕ, má množina {bn: n ∈ ℕ} v ℝ infimum, označme ho b. Protože a ≤ b, je ∩n∈N In = {x ∈ ℝ : a ≤ x ≤ b} ≠ ∅. Jestliže délky intervalů In klesají k nule, pak a = b.
* posloupnost:
  + zobrazení N -> ℝ, označíme-li an jako obraz n (n-tý člen), pak posloupnost (a1, a2, ...) =
  + Pozn. řada je součet členů posloupnosti a1+a2+...+an
* vybraná posloupnost:
  + vybraná posloupnost z posloupnosti je posloupnost , kde je rostoucí posloupnost přirozených čísel
* hromadná hodnota a její existence:
  + **Definice:** Bod a se nazývá hromadná hodnota množiny A, pokud v každém okolí bodu a existuje nekonečně mnoho prvků množiny A
  + **Věta:** každá posloupnost má v R̅ alespoň jednu hromadnou hodnotu, např. +∞ pro neomezenou shora
  + bod a∈ℝ je hromadná hodnota posloupnosti, pokud v každém okolí bodu a leží nekonečně mnoho jejích členů

## Funkce

* funkce, definiční obor, obor hodnot:
  + (reálná) funkce (reálné proměnné) f je zobrazení A → ℝ, kde A ⊂ ℝ je neprázdná množina
    - Pro každé x∈A (vzor) existuje právě jedno y ∈ B (obraz x) takové, že (x, y) ∈ f (značíme y=f(x)).
  + množina A je definiční obor funkce f (značíme *D(f)*)
    - pokud není zadán definiční obor, bereme maximální možný
  + množina f(A) = {f(x): x ∈ A} je obor hodnot funkce f (*značíme R(f)*)
  + obraz množiny M ⊂ A při zobrazení f je množina f(M) = {f(x): x∈M}
  + vzor množiny M ⊂ B při zobrazení f je množina f-1(M) = {x∈A: f(x)∈M}
* graf funkce f: A → ℝ je množina {[x, f(x)]: x ∈ A}
* operace s funkcemi
  + sčítání, odčítání, násobení a dělení fcí definujeme “bodově”
  + složení funkcí f: A → B a g: B → C je funkce g◦f : A → C definovaná předpisem (g◦f)(x) = g(f(x))
    - f nazýváme vnitřní zobrazení, g vnější zobrazení
    - když R(f) ⊃ D(g), tak je definiční obor složené funkce {x∈A: f(x)∈B}
* prostá, na, bijektivní funkce:
  + funkce f : A → B je
    - prostá, pokud různým vzorům odpovídají různé obrazy
      * x, y ∈ A, x≠y → f(x) ≠f(y)
    - na B, pokud její obor hodnot je B (f : A B)
    - vzájemně jednoznačná (bijekce), pokud je prostá a na B
* inverzní funkce:
  + Funkce g: R(f) → A je inverzní k funkci f: A → B, pokud (g◦f)(x) = x pro každé x ∈ A. Značíme g = f−1
  + Funkce f má inverzní funkci právě tehdy, když je prostá. Pak D(f−1) = R(f), R(f−1) = D(f), f je inverzní funkce k f−1 a graf f−1 je symetrický s grafem f podle osy prvního a třetího kvadrantu (přímky o rovnici y = x)
* omezenost:
  + Funkce f je (zdola, shora) omezená na A ⊂ D(f), pokud je (zdola, shora) omezená množina f(A)
* sudost, lichost:
  + funkce f je:
    - sudá, pokud f(−x) = f(x) pro každé x ∈ D(f)
    - lichá, pokud f(−x) = −f(x) pro každé x ∈ D(f).
* monotonie:
  + funkce f je *rostoucí (neklesající)* na množině A ⊂ D(f), pokud f(x) < f(y) (≤) pro všechna x, y ∈ A taková, že x < y
  + funkce f je *klesající (nerostoucí)* na množině A ⊂ D(f), pokud f(x) > f(y) (≥) pro všechna x, y ∈ A taková, že x < y
  + takové funkce se nazývají *monotonní*, rostoucí a klesající funkce se nazývají *ryze monotonní*
  + pozn.: ryze monotonní funkce je prostá a má inverzní funkcí, která má stejnou monotonii
* periodicita:
  + Funkce f je *periodická* s periodou p > 0, pokud f(x+p) = f(x−p) = f(x) pro každé x ∈ D(f)
  + pozn.: Pro periodu p, jsou i np (n ∈ ℕ) periody. Nejmenší perioda (pokud existuje) se nazývá *základní*.
* elementární funkce: xa (a ∈ N, Z, Q, R), ex , sinx, cosx, tgx, cotgx, sinhx, coshx, tanhx, cothx (a ke všem inverzní)
* 
* 
* cos2x + sin2x = cosh2x − sinh2x = 1
* lokální extrémy: hodnota f(a) je:
  + (ostrý) lokální extrém funkce je (ostré) lokální maximum nebo minimum
  + ostré lokální maximum fce f, pokud f<f(a) na některém prstencovém okolí bodu a (analogicky minimum)
  + lokální maximum fce f, pokud f<=f(a) na některém prstencovém okolí bodu a (analogicky minimum)
* extrémy:
  + globální maximum je největší lokální maximum (uvažujeme i limity funkce v krajních bodech, které do intervalu nepatří)
* stacionární bod:
  + bod a se nazývá stacionární bod funkce f, pokud f’(a)=0
* konvexita, konkavita:
  + řekneme, že funkce f je *konvexní* na intervalu I, pokud pro každou trojici čísel x, y, z, kde x<y<z platí:
    - (pokud je znaménko nerovnosti opačné, nazýváme funkci *konkávní*)
  + alternativně: pokud úsečka spojující body grafu leží nad grafem funkce nebo na něm, je funkce konvexní
* inflexní body:
  + bod [a, f(a)] je inflexním bodem funkce f, pokud je f spojitá v bodě a, existuje f’(a) a pokud funkce f je na některém jednostranném okolí bodu a ryze konvexní a na některém jednostranném okolí bodu a ryze konkávní

### Limity a spojitost

* limita
  + Funkce f definovaná v prstencovém okolí bodu a ∈ R má v bodě a *limitu* b, b ∈ R, (limx→a f(x) = b), jestliže platí:
    - Ke každému okolí U bodu b existuje prstencové okolí P bodu a tak, že f(P) ⊂ U.
* spojitost funkce
  + **Definice:** Funkce f je spojitá v bodě a ∈ D(f), pokud ke každému okolí U bodu f(a) existuje okolí V bodu a tak, že f(V ∩ D(f)) ⊂ U. Funkce je spojitá, pokud je spojitá v každém bodě svého definičního oboru
  + **Věta:** Funkce f definovaná v okolí bodu a je v bodě a spojitá právě tehdy, když limx→a f(x) = f(a).
* jednoznačnost limity
  + Každá funkce má v každém bodě nejvýše jednu limitu.
    - **Důkaz**:
      * Chci: Pokud má v a limitu b, tak jiné číslo c ∈ R není limitou
        + Existují disjunktní okolí Ub ,Uc bodů b,c, f−1 (Uc) je disjunktní s f−1 (Ub) a neobsahuje tedy prstencové okolí a.
* **Věta (o monotonie limity):**
  + Je-li f ≤ g na prstencovém okolí a ∈ R, limx→a f(x) = b, limx→a g(x) = c, pak b ≤ c.
* Limita monotonní funkce
  + Monotonní funkce na intervalu má v jeho krajních bodech příslušné jednostranné limity (supremum a infimum funkčních hodnot).
  + Nechť f neklesající (neroustoucí) funkce na intervalu I=(a, b). Pak platí:
    - limx→ af(x) = inf(f(I)), limx→ bf(x) = sup(f(I)) (nerostoucí naopak)
* vztah k omezenosti:
  + má-li funkce f v bodě a vlastní limitu, pak je omezená na některém prstencovém okolí bodu a
* **Věta** (limita součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí)
  + Limita součtu (rozdílu, součinu, podílu) funkcí je součet (rozdíl, součin, podíl) limit, pokud je definován (včetně operací s nevlastními čísly)
  + **Důkaz** limity součtu:
    - Uvažujme: b = limx→a f(x); c = limx→a g(x)
    - Pro okolí U(b+c,ε) uvažujme f(Pf) ⊂ U(b,ε/2) a g(Pg) ⊂ U(c,ε/2), pak (f+g)(Pf ∩ Pg) ⊂ U(b + c,ε).
* **Věta** (limita složené funkce). Nechť pro a,b,c ∈ ℝ platí:
  + (1) limx→a f(x) = b,
  + (2) limy→b g(y) = c,
  + (3) g(b) = c nebo f(x) ≠ b na prstencovém okolí a.
  + Pak limx→a (g ◦ f)(x) = c.
* asymptoty:
  + asymptota v nevlastním bodě a ∈ ℝ je přímka o rovnici y = px + q, pro kterou platí limx→ a(f(x) - (px + q)) = 0
  + má-li funkce v bodě a ∈ ℝ alespoň jednu jednostrannou limitu nevlastní, nazýváme přímku x = a asymptotou
  + pozn.: **výpočet asymptot**
    - 1) asymptota se směrnicí:
      * p = limx→∞f(x)/x
      * q = limx→∞f(x) - px
    - 2) asymptota bez směrnice:
      * najdeme bod a, kde fce není definovaná
      * pokud je limx→af(x) nevlastní alespoň z jedné strany, pak je x = a asymptota
* jednostranné limity:
  + Fce f, která definovaná na levém prstencovém okolí bodu a ∈ ℝ, má v bodě a jednostrannou limitu zleva rovnu b ∈ R̅ , pokud ke každému okolí U bodu b existuje levé prstencové okolí P bodu a, tak, že f(P) ⊂ U.
* obor hodnot spojité funkce na intervalu:
  + **Věta (o mezihodnotě):** Je-li funkce f spojitá na intervalu I a nabývá-li v něm hodnot m a M, m < M, tak na tomto intervalu nabývá všech hodnot〈m, M〉
  + Spojitá funkce na uzavřeném intervalu nabývá největší a nejmenší hodnoty
* Asymptotické chování funkcí (O(g), Θ(g)):
  + **Definice:** Nechť funkce g je definována na prstencovém okolí a ∈ R̅.
    - Funkce f je třídy O(g) (f ∈ O(g), f = O(g)) pro x → a, pokud existuje číslo M a prstencové okolí P bodu a tak, že |f(x)| ≤ M |g(x)| pro každé x ∈ P.
    - Funkce f je třídy Θ(g) (f ∈ Θ(g), f = Θ(g)) pro x → a, pokud existují kladná čísla m, M a prstencové okolí P bodu a tak, že m\*|g(x)| ≤ |f(x)| ≤ M\*|g(x)| pro každé x ∈ P.
  + **Věta:**  Nechť a ∈ R̅
    - Je-li limx→a f(x)/g(x) ∈ ℝ, pak f ∈ O(g) pro x → a.
    - Je-li limx→a f(x)/g(x) ∈ ℝ \ {0}, pak f ∈ Θ(g) pro x → a.

### Derivace

* Derivace
  + Nechť f je funkce definovaná na okolí bodu a. Derivace v bodě a je:
  + vyšších řádů
    - definujeme rekurentně: f0=f, fn=(f(n-1))'
  + derivace funkce na intervalu
    - Nechť funkce f má v každém bodě otevřeného int I vlastní derivaci. Derivace funkce f na int I je funkce f’: x ↦ f’(x) pro x ∈ I
    - Pokuď je I otevřený, uvažujeme v příslušných krajních bodech příslušné jednostranné derivace
* vlastnosti:
  + linearita derivace - respektuje součet, skalární násobek a nulu
  + mají-li funkce f, g vlastní derivace v bodě a, pak:
    - derivace součinu: (fg)’ = f’g + fg’
    - derivace podílu: (f/g) = (f’g - fg’)/(g2) (pokud g(a)!=0)
    - derivace složené fce: f(g(x)) = f’(g(x)) \* g’(x)
    - derivace inverzní funkce:
      * je-li funkce f spojitá a ryze monotonní na intervalu I a existuje-li nenulová derivace funkce f v a ∈ I, pak ex. derivace inverzní funkce f-1 v bodě b = f(a) a platí:
        + =

př: (ln x)’ = 1/(ey)’ = 1/(ey) = 1/(eln x) = 1/x

* funkce s vlastní derivací je spojitá:
  + **Věta:** Funkce je spojitá v každém bodě, ve kterém má vlastní derivaci.
  + **Důkaz:** Nechť funkce f má v bodě a vlastní derivaci. Pak je definována v okolí bodu a a stačí ukázat, že limx->af(x) = f(a), což dostaneme použitím vět o limitě součtu a součinu:
    - f(x) = f(a) + f(x) - f(a) = f(a) + (f(x)−f(a))/(x−a) \* (x − a) →x → a f(a) + f’(a) \* 0 = f(a).
* Rolleova věta:
  + Nechť pro funkci f platí:
    - je spojitá na intervalu〈a, b〉
    - má derivaci v každém bodě intervalu (a, b)
    - když f(a) = f(b), pak f’(c) = 0 pro některý bod c ∈ (a, b)
    - **Důkaz:**
      * pro konstantní je f’ = 0 na (a, b)
      * nekonstantní nabývá minima nebo maxima uvnitř 〈a, b〉
      * například pro maximum v bodě c ∈ (a, b):
        + f’(c) = f’−(c) = limx→c− (f(x)−f(c))/(x−c) ≥ 0,
        + f’(c) = f’+(c) = limx→c+ (f(x)−f(c))/(x−c) ≤ 0.
* Lagrangeova věta
  + Nechť funkce f je spojitá na〈a, b〉a má derivaci v každém bodě (a, b). Pak existuje c ∈ (a, b) tak, že:
* l’Hospitalovo pravidlo
  + nechť pro fce f, g ve tvaru f/g platí:
    - buď limx→ ag(x) = limx→ af(x) = 0 nebo limx→ ag(x) = +-∞
    - existuje limx→ a(f’(x)/g’(x))
    - pak:
      * limx→ a(f(x)/g(x)) = limx→ a(f’(x)/g’(x))
* Taylorův polynom, Taylorova věta
  + *Taylorův polynom* řádu n funkce f v bodě a je právě ten (jediný) polynom stupně nejvýše n, který má v bodě a stejné derivace až do řádu n (včetně nulté, tj. funkční hodnoty), jako má funkce f.
  + **Taylorova věta:** Nechť funkce f má spojité derivace do řádu n ≥ 0 na 〈a, x〉, f(n+1) existuje v každém bodě (a, x). Pak existuje c ∈ (a, x) tak, že:
    - T(x) je ta část beze zbytku
    - kde je zbytek v Lagrangeově tvaru
* tečna a normála grafu funkce:
  + spočítáme y z rovnice y - y0= f’(x0)(x-x0), kde bod [x0, y0] je bod dotyku
  + směrnice tečny: f’(x)
  + směrnice normály: -1/f’(x)
* použití derivace při vyšetřování průběhu funkce:
  + monotonie: Je-li funkce f spojitá na intervalu I a má-li v každém vnitřním bodě I derivaci, pak:
    - 1) Je-li f’(x) > 0 uvnitř I, pak f je rostoucí v I.
    - 2) Je-li f’(x) < 0 uvnitř I, pak f je klesající v I.
    - 3) Je-li f’(x) ≥ 0 uvnitř I, pak f je neklesající v I.
    - 4) Je-li f’(x) ≤ 0 uvnitř I, pak f je nerostoucí v I.
    - **Důkaz:**
      * a, b ∈ I, a < b
      * pro f’(x) > 0: Z Lagrangeovy věty víme, že existuje c takové, že platí (f(b) - f(a))/(b - a) = f’(c)
        + víme, že f’(c) > 0, b - a je > 0, takže f(b) - f(a) musí být > 0 → fce je rostoucí
      * ostatní se dokazují podobně
  + lokálních extrémů
    - Funkce f má v bodě a lokální minimum (lokální maximum), jestliže f(x) ≥ f(a) (f(x) ≤ f(a)) na některém prstencovém okolí bodu a.
  + konvexity
    - fce je konvexní na I, když pro všechny a, b, c ∈ I, a < b < c platí:
    - (pokud je znaménko nerovnosti opačné, nazýváme funkci *konkávní*)
    - f’’ > 0 - konvexní
    - f’’ < 0 - konkávní
  + inflexních bodů
    - Bod [a, f(a)] je inflexním bodem grafu funkce f (funkce f má v bodě a inflexi), pokud je funkce f spojitá v bodě a, existuje f’(a) a funkce f je na některém jednostranném okolí a ryze konvexní a na některém jednostranném okolí a ryze konkávní.
    - f’’ = 0 a na jedné straně má f’’ opačné znaméko než na druhé
* derivace elementárních funkcí

### Integrály

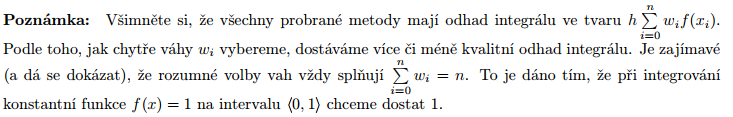
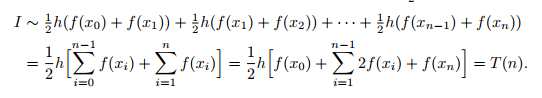
* primitivní funkce: Funkce F se nazývá primitivní funkce k funkci f na intervalu I, jestliže F’ = f na intervalu I.
* neurčitý integrál: Množinu všech primitivních funkcí k funkci f na intervalu I nazýváme neurčitým integrálem f na I (pokud je neprázdná).
* per partes:
  + Nechť na intervalu I existují u’, v’, ∫u’v. Pak ∫u’v=uv-∫uv’
* věta o substituci:
  + Nechť I, J jsou otevřené intervaly, funkce φ: I → J má derivaci φ’ na intervalu I, funkce f: J → ℝ má primitivní funkci F na intervalu J. Pak platí:
    - 1) ∫f(φ(t))φ’(t)dt=F(φ(t))+C, t ∈ I
  + Jestliže je φ ryze monotonní, φ(I)=J a existuje primitivní funkce G(t) k funkci f(φ(t))φ’(t) na intervalu I, pak
    - ∫f(x)dx=G(φ-1(x))+C, x ∈ J
* určitý integrál:
  + Riemannův:
    - *dělení intervalu*〈a, b〉je konečná množina D ⊂〈a, b〉obsahující a a b, necht’ D = {x0, …, xn}
    - dolní integrální součet: S(f, D) = ∑ni=1inf(f(〈xi-1, xi〉)) · (xi − xi−1)
    - horní integrální součet: S̅(f, D) = ∑ni=1sup(f(〈xi-1, xi〉)) · (xi − xi−1)
    - Je-li pro omezenou funkci f na 〈a, b〉supremum dolních integrálních součtů rovno infimu horních integrálních součtů, nazýváme tuto hodnotu určitý (Riemannův) integrál funkce f na 〈a, b〉. Čísla a, b se nazývají dolní a horní mez integrálu.
  + Newtonův:
    - f(x)dx = F(b−)−F(a+).
  + Newtonova - Leibnizova formule:
    - Nechť funkce f je omezená a spojitá na [a, b], f existuje a F je primitivní funkce k f na (a, b). Pak:

      * **Důkaz:**
        + viz skripta - 142
  + pokud existují oba, mají stejnou hodnotu
  + Riemannův je definován i pro některé nespojité funkce, Newtonův zase i pro neomezené funkce a na neomezeném intervalu
* nevlastní integrál:
  + Definice: Nechť funkce f je definována na intervalu (a, b), -∞ <= a < b <= +∞, a nechť pro každý interval [c, d] ⊂ (a, b) je f omezená na [c, d] a existuje f(x) dx. Jestliže funkce f není omezená nebo interval (a, b) není omezený, pak definujeme nevlastní integrál:
    - f(x)dx = limc→ a+f(x)dx + limd→ b-f(x)dx
      * pokud je výraz vpravo definován pro některé e ∈ (a, b)
  + Je-li vlastní, řekneme, že integrál konverguje.
  + další kritéria konvergence:
    - pokud “větší” funkce konverguje, tak konverguje (a naopak)
      * Jestliže |f| ≤ g na (a, b), g konverguje a f je po částech spojitá, pak f konverguje.
      * Jestliže f ≤ g na (a, b), f = +∞ a g je po částech spojitá, pak g = +∞.
    - Jestliže P, Q jsou nenulové polynomy, a, b ∈ R̅, pak **konverguje** právě tehdy, když:
      * 1) Polynom Q nemá v intervalu (a, b) ani ve vlastních krajních bodech tohoto intervalu kořen větší násobnosti než polynom P
      * 2) Jestliže je alespoň jedna z mezí integrálu nevlastní, pak stupeň polynomu Q je alespoň o 2 větší, než stupeň polynomu P
    - další tvrzení:
      * Integrál xα dx konverguje, právě když α < −1.
      * Integrál xα dx konverguje, právě když α > −1
* linearita, aditivita na definičním oboru, integrace per partes, [substituce](http://math.feld.cvut.cz/mt/txtd/3/txc3da3b.htm);
* aditivita na definičním oboru:
  + Nechť f je omezená funkce na intervalu [a,b], a<c<b. Pak f(x)dx =f(x)dx+ f(x)dx (levá strana existuje iff existuje pravá strana)
* integrace x^a (a ∈ R), e^x , sinx, cosx, racionálních funkcí, funkcí typu R(e^ax ), R(lnx)/x, R(sinx,cosx) (jen substituce za sinx a cosx), kde R je racionální funkce;
* primitivní funkce jako integrál s proměnnou mezí:
  + Nechť a, x ∈ I a existuje Newtonův integrál. Potom primitivní funkci F k funkci f určenou vztahem
  + nazýváme integrál s proměnnou mezí
* integrovatelnost monotonní funkce:
  + Monotónní funkce na uzavřeném intervalu má určitý integrál.
  + **Důkaz:**
    - Dn = {a, a + , … , b}
    - S̅(f, Dn) - S(f, Dn) = (f(xi) - f(xi-1)) \* (xi - xi-1) = (f(xi) - f(xi-1)) = →n→ ∞ 0
* integrovatelnost spojité:
  + Spojitá funkce na intervalu má primitivní funkci.
* aplikace určitého integrálu:
  + střední hodnota
    - **Def:** Nechť a nechť konverguje. *Střední hodnota* funkce na intervalu je .
    - **Věta (o střední hodnotě):** Je-li funkce spojitá na intervalu , pak existuje číslo takové, že je střední hodnota funkce na intervalu .
  + délka křivky
    - **Věta:** Nechť funkce má po částech spojitou derivaci na intervalu , . Délka grafu funkce je .
  + obsah plochy
    - **Věta:** Nechť funkce jsou po částech spojité na intervalu , , . Obsah plochy je .
  + objem rotačního tělesa
    - **Věta:** Nechť funkce je po částech spojitá na intervalu . Objem (rotačního) tělesa je .
  + obsah pláště rotačního tělesa
    - **Věta:** Nechť funkce je po částech spojitá na intervalu . Osah množiny (pláště rotačního tělesa) je .

### Posloupnosti a řady

* posloupnost:
  + **Definice:** (Nekonečná) posloupnost reálných čísel je zobrazení N → R. Označíme-li an obraz čísla n (n-tý člen posloupnosti), pak posloupnost zapisujeme jako (a1, a2, ...) =
* limita posloupnosti:
  + **Definice:** Posloupnost má limitu , pokud pro každé okolí bodu existuje tak, že pro všechna přirozená je . Značíme , , . Posloupnost s vlastní limitou se nazývá konvergentní, s nevlastní limitou divergentní.
* vybraná posloupnost
  + **Definice:** Vybraná posloupnost (podposloupnost) z posloupnosti je posloupnost , kde je rostoucí posloupnost přirozených čísel.
* hromadná hodnota a její existence
  + **Definice:** Číslo a ∈ R̅ je hromadná hodnota posloupnosti, pokud v každém okolí *a* leží nekonečně mnoho jejích členů.
    - Každá posloupnost má alespoň jednu hromadnou hodnotu (u omezené posloupnosti hromadnou hodnotu vlastní).
  + **Věta:** Supremum a infimum množiny hromadných hodnot posloupnosti jsou hromadné hodnoty této posloupnosti.
    - limes inferior (lim infn→ ∞an) - nejmenší hromadná hodnota posloupnosti
    - limes superior (lim supn→ ∞an) - největší hromadná hodnota posloupnosti
* řady:
  + součet řady:
    - aritmetická je +- ∞
    - geometrická řada a její součet (důkaz):
      * a1qk = pro , pro když > 1 a řada nekonverguje.
      * **Důkaz:** 
        + Sn = a1(1 + q + … + qn-1)
        + qSn = a1( q + · · · + qn−1 + qn)
        + (1 − q)Sn = a1(1 − qn) // vzniklo odečtením prvních dvou rovnic
  + **Definice:** řada konverguje, má-li konečný součet; diverguje, má-li nekonečný součet; osciluje, nemá-li součet.
  + **Věta:** Je-li řada absolutně konvergentní, lze ji (beze změny součtu) přerovnat a rozdělit;
  + **nutná** podmínka konvergence:
    - jestliže ak konverguje, pak limk→∞ ak = 0
    - **Důkaz:**
      * limk→∞ ak = limk→∞(sk − sk−1) = limk→∞ sk − limk→∞ sk − 1 = s − s = 0.
  + kritéria konvergence:
    - srovnávací:
      * Nechť 0 ≤ ak ≤ bk pro každé k ∈ N.
      * 1) Jestliže bk konverguje, pak i ak konverguje.
      * 2) Jestliže ak diverguje, pak i bk diverguje.
    - podílové
      * Nechť ak ≠ 0 pro každé k ∈ N.
      * 1) Je-li ≤ q < 1 pro každé k ∈ N, pak ak konverguje (absolutně).
      * 2) Je-li ≥ 1 pro každé k ∈ N, pak ak nekonverguje.
      * **Důkaz:**
        + 1) |ak| ≤ |ak−1|q ≤ · · · ≤ |a1|qk−1, |a1|qk−1 konv.
        + 2) |ak| ≥ |ak−1| ≥ · · · ≥ |a1|, ak !→0
    - odmocninové
      * 1) Je-li ≤ q < 1 pro každé k ∈ N, pak ak konverguje (absolutně)
      * 2) Je-li ≥ 1 pro každé k ∈ N, pak ak nekonverguje
      * **Důkaz:**
        + 1) |ak| ≤ qk , qk konverguje
        + 2) |ak| ≥ 1, ak !→ 0
    - integrální
      * Nechť f je nezáporná nerostoucí funkce na〈1, +∞). Pak f(k) konverguje právě tehdy, když konverguje f(x) dx.
      * **Důkaz:**
        + f(k) ≥ f(x) dx ≥ f(k + 1)
        + f(k) ≥ f(x) dx ≥ f(k) − f(1)
    - Leibnizovo - řada musí alternovat
      * Je-li nerostoucí posloupnost (|ak| >= |ak+1|) s nulovou limitou (limk-> inf |ak| = 0) , pak (−1)k−1ak konverguje

### Numerická integrace

* nejlepší asi přečíst si to u Habaly…  
   <https://math.feld.cvut.cz/habala/teaching/den/denln02.pdf>
* 
* obdélníková metoda (řádu 2)
  + používá otevřenou Newton-Cotesovu metodu pro 1 uzel
  + Rozdělím interval <a,b> na n podintervalů délek (b-a)/n = h (krok) s krajními body xi = a + ih, i ∈ {0, 1, …, n}. Dostaneme:
  + a součtem přes vš. podintervaly pak:
  + chyba , kde
* lichoběžníková metoda (řádu 2)
* 
* 
  + používá uzavřenou Newtonovu-Cotesovu metodu pro 2 uzly
  + Rozdělíme interval <a,b> na n podintervalů délek (b-a)/n = h s krajními body xi = a + ih, i ∈ {0, 1, …, n}. Dostaneme:
  + a součtem přes vš. podintervaly pak:
  + chyba , kde
* Simpsonova metoda (řádu 4)
  + animace: <http://mathfaculty.fullerton.edu/mathews/a2001/Animations/Quadrature/Simpson41/Simpsonaa.html>
  + používá uzavřenou Newtonovu-Cotesovu metodu pro 3 uzly
  + Rozdělíme interval <a,b> ekvidistantně na podintervaly a každý z nich na dva stejně dlouhé podintervaly. Pro lepší srovnání s ostatními metodami je zvykem označovat písmenem n **sudý počet** všech takto vzniklých podintervalů délky (b-a)/n = h s krajními body xi = a + ih, i ∈ {0, 1, …, n}. Dostaneme:
  + a součtem přes všechny podintervaly pak:
  + chyba , kde
* odhad chyby metodou polovičního kroku
  + chyba , kde řád je řád použité metody, F je typ metody, h krok
* Richardsonova extrapolace - tady jsou prostě nějaký sračky...
  + x(h) + chyba (metoda polovičního kroku)
  + F1(h)=F(h)+(F(h)-F(kh))/(kp-1)
    - speciální případ k=2: metoda polovičního kroku