Reálná čísla

Poznámka: [] odpovídá $\langle\rangle$

- rozšířená množina reálných čísel je $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, kde $-\infty$ a $+\infty$ se nazývají *nevlastní čísla*
  - nedefinujeme: $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, ∞ / ∞, 1^{∞}, 0^0, ∞^0, $0/0$
- intervaly:
  - Pro každé $a, b \in R$, $a < b$, rozeznáváme tyto typy intervalů s krajními body a, b:
    - $(a, b) = \{x \in R : a < x < b\}$ (otevřený)
    - $\langle a, b\rangle = \{x \in R : a \leq x \leq b\}$ pro $a, b \in R$ (uzavřený)
    - $(a, b\rangle = \{x \in R : a < x \leq b\}$ pro $b \in R$ (zleva otevřený, zprava uzavřený)
    - $\langle a,, b) = \{x \in R : a \leq x < b\}$ pro $a \in R$ (zleva uzavřený, zprava otevřený)
    - body intervalu, které nejsou krajní, nazýváme *vnitřní*
- okolí bodu:
  - *okolí bodu* $a \in \mathbb{R}$ o poloměru $r>0$ je $U(a, r) = \{x \in \mathbb{R}: |x-a|<r\} = (a-r, a+r)$.
  - *prstencové okolí bodu* $a \in \mathbb{R}$ o poloměru $r>0$ je $P(a, r) = U(a, r) \setminus \{a\} = (a-r, a) \cup (a, a+r)$.
  - okolí bodů $\pm\infty$ jsou
    - $U(-\infty, r) = P(-\infty, r) = \{x \in \mathbb{R}: x < r\} = (-\infty, r)$
    - $U(+\infty, r) = P(+\infty, r) = \{x \in \mathbb{R}: x > r\} = (r, +\infty)$
- omezenost:
  - Nechť $M \subset \mathbb{R}$. Číslo $k \in \mathbb{R}$ se nazývá:
    - *horní mez* množiny M, pokud $x \leq k$ pro každé $x \in M$
    - *dolní mez* množiny M, pokud $x \geq k$ pro každé $x \in M$
  - Množina M se nazývá:
    - *shora omezená*, pokud má horní mez
    - *zdola omezená*, pokud má dolní mez
    - *omezená*, pokud má horní i dolní mez.
- maximum, minimum, supremum, infimum, jejich existence:
  - Věta: Každá množina reálných čísel má supremum i infimum.
  - Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná:
    - *supremum* množiny M (sup M) je nejmenší horní mez množiny M ($+\infty$ pro shora neomezenou množinu)
    - *infimum* množiny M (inf M) je největší dolní mez množiny M ($-\infty$ pro zdola neomezenou množinu M)
  - $\sup \varnothing = -\infty$, $\inf \varnothing = +\infty$
  - max M (min M) existuje právě tehdy, když $\sup M \in M$ ($\inf M \in M$)

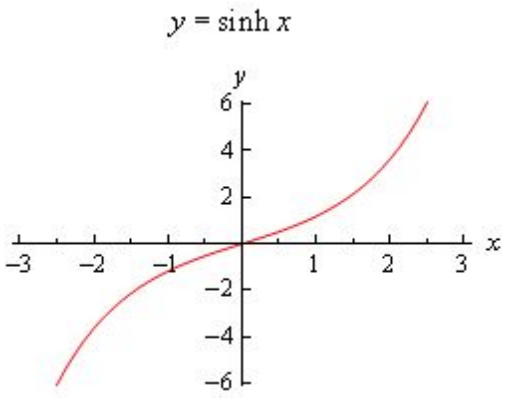
        - jestliže existuje maximum (minimum) množiny, pak je zároveň supremem (infimem) této množiny
- princip vnořených intervalů:
    - Jsou-li I_n ($n \in \mathbb{N}$) uzavřené intervaly a $I_1 \supset I_2 \supset \cdots$, pak $\bigcap_{n\in N} I_n \neq \varnothing$. Jestliže navíc délky intervalů I_n klesají k nule, pak je tento průnik jednobodový.
    - **Důkaz:** Označme $I_n = [a_n, b_n]$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Z předpokladů vyplývá, že $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq b_3 \leq b_2 \leq b_1$. Množina $\{a_n: n \in \mathbb{N}\}$ je neprázdná, shora omezená každým číslem b_n, má tedy v $\mathbb{R}$ supremum, označme ho a. Protože $a \leq b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, má množina $\{b_n: n \in \mathbb{N}\}$ v $\mathbb{R}$ infimum, označme ho b. Protože $a \leq b$, je $\bigcap_{n\in N} I_n = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \neq \varnothing$. Jestliže délky intervalů I_n klesají k nule, pak $a = b$.
- posloupnost:
    - zobrazení N -> $\mathbb{R}$, označíme-li a_n jako obraz n (n-tý člen), pak posloupnost $(a_1, a_2, ...) = (a_n)_{n=1}^{\infty}$
    - Pozn. řada je součet členů posloupnosti a1+a2+...+an
- vybraná posloupnost:
    - vybraná posloupnost z posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost $(a_{k_n})_{n=1}^{\infty}$, kde $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel
- hromadná hodnota a její existence:
    - **Definice:** Bod a se nazývá hromadná hodnota množiny A, pokud v každém okolí bodu a existuje nekonečně mnoho prvků množiny A
    - **Věta:** každá posloupnost má v ℝ alespoň jednu hromadnou hodnotu, např. +∞ pro neomezenou shora
    - bod $a \in \mathbb{R}$ je hromadná hodnota posloupnosti, pokud v každém okolí bodu a leží nekonečně mnoho jejích členů

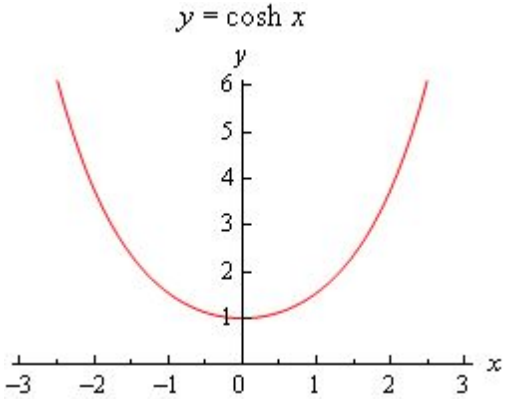
Funkce

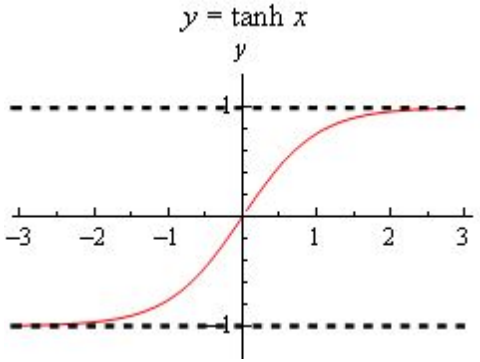
- funkce, definiční obor, obor hodnot:
    - (reálná) funkce (reálné proměnné) f je zobrazení $A \rightarrow \mathbb{R}$, kde $A \subset \mathbb{R}$ je neprázdná množina
        - Pro každé $x \in A$ (vzor) existuje právě jedno $y \in B$ (obraz x) takové, že $(x, y) \in f$ (značíme $y=f(x)$).
    - množina A je definiční obor funkce f (značíme *D(f)*)
        - pokud není zadán definiční obor, bereme maximální možný
    - množina $f(A) = \{f(x): x \in A\}$ je obor hodnot funkce f (*značíme R(f)*)
    - obraz množiny $M \subset A$ při zobrazení f je množina $f(M) = \{f(x): x \in M\}$
    - vzor množiny $M \subset B$ při zobrazení f je množina $f_{-1}(M) = \{x \in A: f(x) \in M\}$
- graf funkce $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ je množina $\{[x, f(x)]: x \in A\}$
- operace s funkcemi
    - sčítání, odčítání, násobení a dělení fcí definujeme “bodově”
    - složení funkcí $f: A \rightarrow B$ a $g: B \rightarrow C$ je funkce $g \circ f : A \rightarrow C$ definovaná předpisem $(g \circ f)(x) = g(f(x))$
        - f nazýváme vnitřní zobrazení, g vnější zobrazení
        - když $R(f) \supset D(g)$, tak je definiční obor složené funkce $\{x \in A: f(x) \in B\}$
- prostá, na, bijektivní funkce:

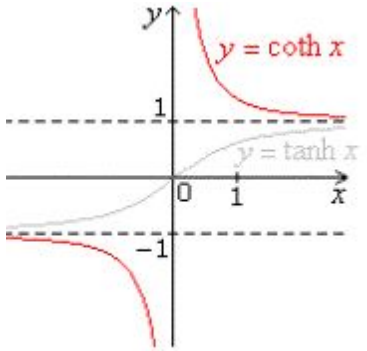
- funkce f : A → B je
  - prostá, pokud různým vzorům odpovídají různé obrazy
    - x, y ∈ A, x≠y → f(x) ≠f(y)
  - na B, pokud její obor hodnot je B (f : A $\xrightarrow{\text{na}}$ B)
  - vzájemně jednoznačná (bijekce), pokud je prostá a na B

- inverzní funkce:
  - Funkce g: R(f) → A je inverzní k funkci f: A → B, pokud (g∘f)(x) = x pro každé x ∈ A. Značíme g = f_{-1}
  - Funkce f má inverzní funkci právě tehdy, když je prostá. Pak D(f_{-1}) = R(f), R(f_{-1}) = D(f), f je inverzní funkce k f_{-1} a graf f_{-1} je symetrický s grafem f podle osy prvního a třetího kvadrantu (přímky o rovnici y = x)
- omezenost:
  - Funkce f je (zdola, shora) omezená na A ⊂ D(f), pokud je (zdola, shora) omezená množina f(A)
- sudost, lichost:
  - funkce f je:
    - sudá, pokud f(−x) = f(x) pro každé x ∈ D(f)
    - lichá, pokud f(−x) = −f(x) pro každé x ∈ D(f).
- monotonie:
  - funkce f je *rostoucí (neklesající)* na množině A ⊂ D(f), pokud f(x) < f(y) (≤) pro všechna x, y ∈ A taková, že x < y
  - funkce f je *klesající (nerostoucí)* na množině A ⊂ D(f), pokud f(x) > f(y) (≥) pro všechna x, y ∈ A taková, že x < y
  - takové funkce se nazývají *monotonní*, rostoucí a klesající funkce se nazývají *ryze monotonní*
  - pozn.: ryze monotonní funkce je prostá a má inverzní funkcí, která má stejnou monotonii
- periodicita:
  - Funkce f je *periodická* s periodou p > 0, pokud f(x+p) = f(x−p) = f(x) pro každé x ∈ D(f)
  - pozn.: Pro periodu p, jsou i np (n ∈ ℕ) periody. Nejmenší perioda (pokud existuje) se nazývá *základní*.
- elementární funkce: x^a (a ∈ N, Z, Q, R), e^x , sinx, cosx, tgx, cotgx, sinhx, coshx, tanhx, cothx (a ke všem inverzní)
- $\sinh x = \frac{\mathbf{e}^{x} - \mathbf{e}^{-x}}{2}$ $\cosh x = \frac{\mathbf{e}^{x} + \mathbf{e}^{-x}}{2}$

- 







-
- $\cos^2 x + \sin^2 x = \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
- lokální extrémy: hodnota f(a) je:
  - (ostrý) lokální extrém funkce je (ostré) lokální maximum nebo minimum
  - ostré lokální maximum fce f, pokud f<f(a) na některém prstencovém okolí bodu a (analogicky minimum)
  - lokální maximum fce f, pokud f<=f(a) na některém prstencovém okolí bodu a (analogicky minimum)
- extrémy:
  - globální maximum je největší lokální maximum (uvažujeme i limity funkce v krajních bodech, které do intervalu nepatří)
- stacionární bod:
  - bod a se nazývá stacionární bod funkce f, pokud f'(a)=0
- konvexita, konkavita:
  - řekneme, že funkce f je *konvexní* na intervalu I, pokud pro každou trojici čísel x, y, z, kde x<y<z platí:
    - $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$ (pokud je znaménko nerovnosti opačné, nazýváme funkci *konkávní*)
  - alternativně: pokud úsečka spojující body grafu leží nad grafem funkce nebo na něm, je funkce konvexní
- inflexní body:
  - bod [a, f(a)] je inflexním bodem funkce f, pokud je f spojitá v bodě a, existuje f'(a) a pokud funkce f je na některém jednostranném okolí bodu a ryze konvexní a na některém jednostranném okolí bodu a ryze konkávní

Limity a spojitost

- limita
  - Funkce f definovaná v prstencovém okolí bodu a ∈ R má v bodě a *limitu* b, b ∈ R, ($\lim_{x \to a} f(x) = b$), jestliže platí:
    - Ke každému okolí U bodu b existuje prstencové okolí P bodu a tak, že f(P) ⊂ U.
- spojitost funkce

    - **Definice:** Funkce f je spojitá v bodě a $\in$ D(f), pokud ke každému okolí U bodu f(a) existuje okolí V bodu a tak, že f(V $\cap$ D(f)) $\subset$ U. Funkce je spojitá, pokud je spojitá v každém bodě svého definičního oboru
    - **Věta:** Funkce f definovaná v okolí bodu a je v bodě a spojitá právě tehdy, když $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.
- jednoznačnost limity
    - Každá funkce má v každém bodě nejvýše jednu limitu.
        - **Důkaz**:
            - Chci: Pokud má v a limitu b, tak jiné číslo c $\in$ R není limitou
                - Existují disjunktní okolí U_b ,U_c bodů b,c, $f^{-1}(U_c)$ je disjunktní s $f^{-1}(U_b)$ a neobsahuje tedy prstencové okolí a.
- **Věta (o monotonie limity):**
    - Je-li f ≤ g na prstencovém okolí a $\in$ R, $\lim_{x\to a} f(x) = b$, $\lim_{x\to a} g(x) = c$, pak b ≤ c.
- Limita monotonní funkce
    - Monotonní funkce na intervalu má v jeho krajních bodech příslušné jednostranné limity (supremum a infimum funkčních hodnot).
    - Nechť f neklesající (neroustoucí) funkce na intervalu I=(a, b). Pak platí:
        - $\lim_{x\to a} f(x) = \inf(f(I))$, $\lim_{x\to b} f(x) = \sup(f(I))$ (nerostoucí naopak)
- vztah k omezenosti:
    - má-li funkce f v bodě a vlastní limitu, pak je omezená na některém prstencovém okolí bodu a
- **Věta** (limita součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí)
    - Limita součtu (rozdílu, součinu, podílu) funkcí je součet (rozdíl, součin, podíl) limit, pokud je definován (včetně operací s nevlastními čísly)
    - **Důkaz** limity součtu:
        - Uvažujme: $b = \lim_{x\to a} f(x)$; $c = \lim_{x\to a} g(x)$
        - Pro okolí U(b+c,ε) uvažujme $f(P_f) \subset U(b,\varepsilon/2)$ a $g(P_g) \subset U(c,\varepsilon/2)$, pak $(f+g)(P_f \cap P_g) \subset U(b + c,\varepsilon)$.
- **Věta** (limita složené funkce). Nechť pro a,b,c $\in \mathbb{R}$ platí:
    - (1) $\lim_{x\to a} f(x) = b$,
    - (2) $\lim_{y\to b} g(y) = c$,
    - (3) g(b) = c nebo f(x) ≠ b na prstencovém okolí a.
    - Pak $\lim_{x\to a} (g \circ f)(x) = c$.
- asymptoty:
    - asymptota v nevlastním bodě a $\in \mathbb{R}$ je přímka o rovnici y = px + q, pro kterou platí $\lim_{x\to a}(f(x) - (px + q)) = 0$
    - má-li funkce v bodě a $\in \mathbb{R}$ alespoň jednu jednostrannou limitu nevlastní, nazýváme přímku x = a asymptotou
    - pozn.: **výpočet asymptot**
        - 1) asymptota se směrnicí:
            - $p = \lim_{x\to\infty} f(x)/x$
            - $q = \lim_{x\to\infty} f(x) - px$
        - 2) asymptota bez směrnice:

        - najdeme bod a, kde fce není definovaná
        - pokud je $\lim_{x \to a} f(x)$ nevlastní alespoň z jedné strany, pak je x = a asymptota
- jednostranné limity:
    - Fce f, která definovaná na levém prstencovém okolí bodu a $\in \mathbb{R}$, má v bodě a jednostrannou limitu zleva rovnu b $\in \mathbb{R}$, pokud ke každému okolí U bodu b existuje levé prstencové okolí P bodu a, tak, že f(P) $\subset$ U.
- obor hodnot spojité funkce na intervalu:
    - **Věta (o mezihodnotě):** Je-li funkce f spojitá na intervalu I a nabývá-li v něm hodnot m a M, m < M, tak na tomto intervalu nabývá všech hodnot $\langle m, M \rangle$
    - Spojitá funkce na uzavřeném intervalu nabývá největší a nejmenší hodnoty
- Asymptotické chování funkcí (O(g), Θ(g)):
    - **Definice:** Nechť funkce g je definována na prstencovém okolí a $\in \mathbb{R}$.
        - Funkce f je třídy O(g) (f $\in$ O(g), f = O(g)) pro x $\to$ a, pokud existuje číslo M a prstencové okolí P bodu a tak, že |f(x)| ≤ M |g(x)| pro každé x $\in$ P.
        - Funkce f je třídy Θ(g) (f $\in$ Θ(g), f = Θ(g)) pro x $\to$ a, pokud existují kladná čísla m, M a prstencové okolí P bodu a tak, že m*|g(x)| ≤ |f(x)| ≤ M*|g(x)| pro každé x $\in$ P.
    - **Věta:** Nechť a $\in \mathbb{R}$
        - Je-li $\lim_{x \to a} f(x)/g(x) \in \mathbb{R}$, pak f $\in$ O(g) pro x $\to$ a.
        - Je-li $\lim_{x \to a} f(x)/g(x) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, pak f $\in$ Θ(g) pro x $\to$ a.

Derivace

- Derivace
    - Nechť f je funkce definovaná na okolí bodu a. Derivace v bodě a je:
        - $\frac{df(a)}{dx} = f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$
    - vyšších řádů
        - definujeme rekurentně: $f^0=f$, $f^n=(f^{(n-1)})'$
    - derivace funkce na intervalu
        - Nechť funkce f má v každém bodě otevřeného int I vlastní derivaci. Derivace funkce f na int I je funkce f': x $\mapsto$ f'(x) pro x $\in$ I
        - Pokuď je I otevřený, uvažujeme v příslušných krajních bodech příslušné jednostranné derivace
- vlastnosti:
    - linearita derivace - respektuje součet, skalární násobek a nulu
    - mají-li funkce f, g vlastní derivace v bodě a, pak:
        - derivace součinu: (fg)' = f'g + fg'

        - derivace podílu: (f/g) = (f'g - fg')/(g^2) (pokud g(a)!=0)
        - derivace složené fce: f(g(x)) = f'(g(x)) * g'(x)
        - derivace inverzní funkce:
            - je-li funkce f spojitá a ryze monotonní na intervalu I a existuje-li nenulová derivace funkce f v a ∈ I, pak ex. derivace inverzní funkce f_{-1} v bodě b = f(a) a platí:
                - $f_{-1}'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)} = f_{-1}'(b)$
                    - př: (ln x)' = 1/(e^y)' = 1/(e^y) = 1/($e^{\ln x}$) = 1/x
- funkce s vlastní derivací je spojitá:
    - **Věta:** Funkce je spojitá v každém bodě, ve kterém má vlastní derivaci.
    - **Důkaz:** Nechť funkce f má v bodě a vlastní derivaci. Pak je definována v okolí bodu a a stačí ukázat, že $\lim_{x->a} f(x) = f(a)$, což dostaneme použitím vět o limitě součtu a součinu:
        - $f(x) = f(a) + f(x) - f(a) = f(a) + (f(x)-f(a))/(x-a) * (x - a) \rightarrow_{x \rightarrow a} f(a) + f'(a) * 0 = f(a)$.
- Rolleova věta:
    - Nechť pro funkci f platí:
        - je spojitá na intervalu ⟨a, b⟩
        - má derivaci v každém bodě intervalu (a, b)
        - když f(a) = f(b), pak f'(c) = 0 pro některý bod c ∈ (a, b)
        - **Důkaz:**
            - pro konstantní je f' = 0 na (a, b)
            - nekonstantní nabývá minima nebo maxima uvnitř ⟨a, b⟩
            - například pro maximum v bodě c ∈ (a, b):
                - $f'(c) = f'_-(c) = \lim_{x \rightarrow c-} (f(x)-f(c))/(x-c) \geq 0$,
                - $f'(c) = f'_+(c) = \lim_{x \rightarrow c+} (f(x)-f(c))/(x-c) \leq 0$.
- Lagrangeova věta
    - Nechť funkce f je spojitá na ⟨a, b⟩ a má derivaci v každém bodě (a, b). Pak existuje c ∈ (a, b) tak, že:
        - $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$
- l'Hospitalovo pravidlo
    - nechť pro fce f, g ve tvaru f/g platí:
        - buď $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ nebo $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +-\infty$
        - existuje $\lim_{x \rightarrow a} (f'(x)/g'(x))$
        - pak:
            - $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)/g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} (f'(x)/g'(x))$
- Taylorův polynom, Taylorova věta

- *Taylorův polynom* řádu n funkce f v bodě a je právě ten (jediný) polynom stupně nejvýše n, který má v bodě a stejné derivace až do řádu n (včetně nulté, tj. funkční hodnoty), jako má funkce f.
- **Taylorova věta:** Nechť funkce f má spojité derivace do řádu n ≥ 0 na ⟨a, x⟩ , $f^{(n+1)}$ existuje v každém bodě (a, x). Pak existuje c ∈ (a, x) tak, že:
  - $f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$
  - T(x) je ta část beze zbytku
  - kde $\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ je zbytek v Lagrangeově tvaru

- tečna a normála grafu funkce:
  - spočítáme y z rovnice $y - y_0 = f'(x_0)(x-x_0)$, kde bod $[x_0, y_0]$ je bod dotyku
  - směrnice tečny: f'(x)
  - směrnice normály: -1/f'(x)
- použití derivace při vyšetřování průběhu funkce:
  - monotonie: Je-li funkce f spojitá na intervalu I a má-li v každém vnitřním bodě I derivaci, pak:
    - 1) Je-li f'(x) > 0 uvnitř I, pak f je rostoucí v I.
    - 2) Je-li f'(x) < 0 uvnitř I, pak f je klesající v I.
    - 3) Je-li f'(x) ≥ 0 uvnitř I, pak f je neklesající v I.
    - 4) Je-li f'(x) ≤ 0 uvnitř I, pak f je nerostoucí v I.
    - **Důkaz:**
      - a, b ∈ I, a < b
      - pro f'(x) > 0: Z Lagrangeovy věty víme, že existuje c takové, že platí (f(b) - f(a))/(b - a) = f'(c)
        - víme, že f'(c) > 0, b - a je > 0, takže f(b) - f(a) musí být > 0 → fce je rostoucí
      - ostatní se dokazují podobně
  - lokálních extrémů
    - Funkce f má v bodě a lokální minimum (lokální maximum), jestliže f(x) ≥ f(a) (f(x) ≤ f(a)) na některém prstencovém okolí bodu a.
  - konvexity
    - fce je konvexní na I, když pro všechny a, b, c ∈ I, a < b < c platí:
    - $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$ (pokud je znaménko nerovnosti opačné, nazýváme funkci *konkávní*)
    - f'' > 0 - konvexní
    - f'' < 0 - konkávní
  - inflexních bodů
    - Bod [a, f(a)] je inflexním bodem grafu funkce f (funkce f má v bodě a inflexi), pokud je funkce f spojitá v bodě a, existuje f'(a) a funkce f je na některém jednostranném okolí a ryze konvexní a na některém jednostranném okolí a ryze konkávní.
    - f'' = 0 a na jedné straně má f'' opačné znaméko než na druhé

- derivace elementárních funkcí

Integrály

- primitivní funkce: Funkce F se nazývá primitivní funkce k funkci f na intervalu I, jestliže F' = f na intervalu I.
- neurčitý integrál: Množinu všech primitivních funkcí k funkci f na intervalu I nazýváme neurčitým integrálem f na I (pokud je neprázdná).
- per partes:
  - Nechť na intervalu I existují u', v', ∫u'v. Pak ∫u'v=uv-∫uv'
- věta o substituci:
  - Nechť I, J jsou otevřené intervaly, funkce φ: I → J má derivaci φ' na intervalu I, funkce f: J → ℝ má primitivní funkci F na intervalu J. Pak platí:
    - 1) ∫f(φ(t))φ'(t)dt=F(φ(t))+C, t ∈ I
  - Jestliže je φ ryze monotonní, φ(I)=J a existuje primitivní funkce G(t) k funkci f(φ(t))φ'(t) na intervalu I, pak
    - ∫f(x)dx=G($φ_{-1}$(x))+C, x ∈ J
- určitý integrál:
  - Riemannův:
    - *dělení intervalu* ⟨a, b⟩ je konečná množina D ⊂ ⟨a, b⟩ obsahující a a b, nechť D = {x_0, …, x_n}
    - dolní integrální součet: $\underline{S}(f, D) = \sum_{i=1}^{n} \inf(f(\langle x_{i-1}, x_i \rangle)) \cdot (x_i - x_{i-1})$
    - horní integrální součet: $\overline{S}(f, D) = \sum_{i=1}^{n} \sup(f(\langle x_{i-1}, x_i \rangle)) \cdot (x_i - x_{i-1})$
    - Je-li pro omezenou funkci f na ⟨a, b⟩ supremum dolních integrálních součtů rovno infimu horních integrálních součtů, nazýváme tuto hodnotu určitý (Riemannův) integrál funkce f na ⟨a, b⟩. Čísla a, b se nazývají dolní a horní mez integrálu.
  - Newtonův:
    - $\int_a^b f(x)dx = F(b-)-F(a+)$.
  - Newtonova - Leibnizova formule:
    - Nechť funkce f je omezená a spojitá na [a, b], $\int_a^b f$ existuje a F je primitivní funkce k f na (a, b). Pak:
      - $\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b-) - F(a+)$
      - **Důkaz:**
        - viz skripta - 142
  - pokud existují oba, mají stejnou hodnotu
  - Riemannův je definován i pro některé nespojité funkce, Newtonův zase i pro neomezené funkce a na neomezeném intervalu
- nevlastní integrál:

- Definice: Nechť funkce f je definována na intervalu (a, b), -∞ <= a < b <= +∞, a nechť pro každý interval [c, d] ⊂ (a, b) je f omezená na [c, d] a existuje $\int_c^d f(x)\,dx$. Jestliže funkce f není omezená nebo interval (a, b) není omezený, pak definujeme nevlastní integrál:
  - $\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to a+}\int_c^e f(x)dx + \lim_{d\to b-}\int_e^d f(x)dx$
    - pokud je výraz vpravo definován pro některé e ∈ (a, b)
- Je-li vlastní, řekneme, že integrál konverguje.
- další kritéria konvergence:
  - pokud "větší" funkce konverguje, tak konverguje (a naopak)
    - Jestliže |f| ≤ g na (a, b), $\int_a^b g$ konverguje a f je po částech spojitá, pak $\int_a^b f$ konverguje.
    - Jestliže f ≤ g na (a, b), $\int_a^b f = +\infty$ a g je po částech spojitá, pak $\int_a^b g = +\infty$.
  - Jestliže P, Q jsou nenulové polynomy, a, b ∈ ℝ, pak $\int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ **konverguje** právě tehdy, když:
    - 1) Polynom Q nemá v intervalu (a, b) ani ve vlastních krajních bodech tohoto intervalu kořen větší násobnosti než polynom P
    - 2) Jestliže je alespoň jedna z mezí integrálu nevlastní, pak stupeň polynomu Q je alespoň o 2 větší, než stupeň polynomu P
  - další tvrzení:
    - Integrál $\int_1^\infty x^\alpha\,dx$ konverguje, právě když α < −1.
    - Integrál $\int_0^1 x^\alpha\,dx$ konverguje, právě když α > −1
- linearita, aditivita na definičním oboru, integrace per partes, substituce;
- aditivita na definičním oboru:
  - Nechť f je omezená funkce na intervalu [a,b], a<c<b. Pak $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ (levá strana existuje iff existuje pravá strana)
- integrace x^a (a ∈ R), e^x , sinx, cosx, racionálních funkcí, funkcí typu R(e^ax), R(lnx)/x, R(sinx,cosx) (jen substituce za sinx a cosx), kde R je racionální funkce;
- primitivní funkce jako integrál s proměnnou mezí:
  - Nechť a, x ∈ I a existuje Newtonův integrál. Potom primitivní funkci F k funkci f určenou vztahem
  - $F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)\,dt$

- nazýváme integrál s proměnnou mezí
- integrovatelnost monotonní funkce:
  - Monotónní funkce na uzavřeném intervalu má určitý integrál.
  - **Důkaz:**
    - $D_n = \{a, a + \frac{b-a}{n}, \dots, b\}$
    - $\overline{S}(f, D_n) - \underline{S}(f, D_n) = \sum_{i=1}^{\infty} (f(x_i) - f(x_{i-1})) * (x_i - x_{i-1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{\infty} (f(x_i) - f(x_{i-1})) = \frac{b-a}{n} \cdot |f(b) - f(a)| \to^{n \to \infty} 0$
- integrovatelnost spojité:
  - Spojitá funkce na intervalu má primitivní funkci.
- aplikace určitého integrálu:
  - střední hodnota
    - **Def:** Nechť $a, b \in R$ a nechť $\int_a^b f(x)\,dx$ konverguje. *Střední hodnota* funkce f na intervalu $< a, b >$ je $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$.
    - **Věta (o střední hodnotě):** Je-li funkce f spojitá na intervalu $< a, b >$, pak existuje číslo $c \in (a, b)$ takové, že $f(c)$ je střední hodnota funkce f na intervalu $< a, b >$.
  - délka křivky
    - **Věta:** Nechť funkce f má po částech spojitou derivaci na intervalu (a, b), $a, b \in \overline{R}$. Délka grafu funkce f je $\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$.
  - obsah plochy
    - **Věta:** Nechť funkce f, g jsou po částech spojité na intervalu (a, b), $a, b \in \overline{R}$, $f \leq g$. Obsah plochy $\left\{[x, y] \in R^2 : x \in (a, b), f(x) \leq y \leq g(x)\right\}$ je $\int_a^b (g(x) - f(x))\,dx$.
  - objem rotačního tělesa
    - **Věta:** Nechť funkce f je po částech spojitá na intervalu $(a, b), a, b \in \overline{R}$. Objem (rotačního) tělesa $\left\{[x, y, z] \in R^3 : x \in (a, b), y^2 + z^2 \leq f^2(x)\right\}$ je $\pi * \int_a^b f^2(x)\,dx$.
  - obsah pláště rotačního tělesa
    - **Věta:** Nechť funkce f je po částech spojitá na intervalu $(a, b), a, b \in \overline{R}$. Osah množiny $\left\{[x, y, z] \in R^3 : x \in (a, b), y^2 + z^2 = f^2(x)\right\}$ (pláště rotačního tělesa) je $2\pi * \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$.

Posloupnosti a řady

- posloupnost:
  - **Definice:** (Nekonečná) posloupnost reálných čísel je zobrazení N → R. Označíme-li a_n obraz čísla n (n-tý člen posloupnosti), pak posloupnost zapisujeme jako $(a_1, a_2, ...) = (a_n)_{n=1}^{\infty}$
- limita posloupnosti:
  - **Definice:** Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má limitu $a \in \overline{R}$, pokud pro každé okolí U bodu a existuje $n_0 \in N$ tak, že pro všechna přirozená $n > n_0$ je $a_n \in U$. Značíme $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $a_n \to^{n\to\infty} a$, $a_n \to a \ pro\ n \to \infty$. Posloupnost s vlastní limitou se nazývá konvergentní, s nevlastní limitou divergentní.
- vybraná posloupnost
  - **Definice:** Vybraná posloupnost (podposloupnost) z posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost $(a_{k_n})_{n=1}^{\infty}$, kde $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel.
- hromadná hodnota a její existence
  - **Definice:** Číslo a ∈ ℝ je hromadná hodnota posloupnosti, pokud v každém okolí *a* leží nekonečně mnoho jejích členů.
    - Každá posloupnost má alespoň jednu hromadnou hodnotu (u omezené posloupnosti hromadnou hodnotu vlastní).
  - **Věta:** Supremum a infimum množiny hromadných hodnot posloupnosti jsou hromadné hodnoty této posloupnosti.
    - limes inferior ($\lim \inf_{n\to\infty} a_n$) - nejmenší hromadná hodnota posloupnosti
    - limes superior ($\lim \sup_{n\to\infty} a_n$) - největší hromadná hodnota posloupnosti
- řady:
  - součet řady:
    - aritmetická je +- ∞
    - geometrická řada a její součet (důkaz):
      - $\sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^k = \frac{a1}{1-q}$ pro $|q| < 1$, pro když $|q| > 1$ a $a \neq 0$ řada nekonverguje.
      - **Důkaz:**
        - $S_n = a_1(1 + q + \ldots + q^{n-1})$
        - $qS_n = a_1(q + \cdots + q^{n-1} + q^n)$
        - $(1 - q)S_n = a_1(1 - q^n)$ // vzniklo odečtením prvních dvou rovnic
        - $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$
  - **Definice:** řada konverguje, má-li konečný součet; diverguje, má-li nekonečný součet; osciluje, nemá-li součet.
  - **Věta:** Je-li řada absolutně konvergentní, lze ji (beze změny součtu) přerovnat a rozdělit;
  - **nutná** podmínka konvergence:

- jestliže $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje, pak $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$
- **Důkaz:**
  - $\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty}(s_k - s_{k-1}) = \lim_{k\to\infty} s_k - \lim_{k\to\infty} s_{k-1} = s - s = 0$.

- kritéria konvergence:
  - srovnávací:
    - Nechť $0 \le a_k \le b_k$ pro každé $k \in N$.
    - 1) Jestliže $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konverguje, pak i $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje.
    - 2) Jestliže $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverguje, pak i $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ diverguje.
  - podílové
    - Nechť $a_k \neq 0$ pro každé $k \in N$.
    - 1) Je-li $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \le q < 1$ pro každé $k \in N$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje (absolutně).
    - 2) Je-li $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \ge 1$ pro každé $k \in N$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nekonverguje.
    - **Důkaz:**
      - 1) $|a_k| \le |a_{k-1}|q \le \cdots \le |a_1|q^{k-1}$, $\sum_{k=1}^{\infty} |a_1|q^{k-1}$ konv.
      - 2) $|a_k| \ge |a_{k-1}| \ge \cdots \ge |a_1|$, $a_k \not\to 0$
  - odmocninové
    - 1) Je-li $\sqrt[k]{|a_k|} \le q < 1$ pro každé $k \in N$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje (absolutně)
    - 2) Je-li $\sqrt[k]{|a_k|} \ge 1$ pro každé $k \in N$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nekonverguje
    - **Důkaz:**
      - 1) $|a_k| \le q^k$, $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ konverguje
      - 2) $|a_k| \ge 1$, $a_k \not\to 0$
  - integrální
    - Nechť f je nezáporná nerostoucí funkce na $\langle 1, +\infty)$. Pak $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$.
    - **Důkaz:**

- $f(k) \geq \int_{k}^{k+1} f(x)\,dx \geq f(k+1)$
- $\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \geq \int_{1}^{+\infty} f(x)\,dx \geq \sum_{k=1}^{\infty} f(k) - f(1)$

- Leibnizovo - řada musí alternovat
  - Je-li $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ nerostoucí posloupnost ($|a_k| >= |a_{k+1}|$) s nulovou limitou ($\lim_{k\to\infty} |a_k| = 0$) , pak $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$ konverguje

Numerická integrace

- nejlepší asi přečíst si to u Habaly…
  https://math.feld.cvut.cz/habala/teaching/den/denln02.pdf

Poznámka: Všimněte si, že všechny probrané metody mají odhad integrálu ve tvaru $h \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$. Podle toho, jak chytře váhy w_i vybereme, dostáváme více či méně kvalitní odhad integrálu. Je zajímavé (a dá se dokázat), že rozumné volby vah vždy splňují $\sum_{i=0}^{n} w_i = n$. To je dáno tím, že při integrování konstantní funkce $f(x) = 1$ na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ chceme dostat 1.

- obdélníková metoda (řádu 2)
  - používá otevřenou Newton-Cotesovu metodu pro 1 uzel
  - Rozdělím interval <a,b> na n podintervalů délek (b-a)/n = h (krok) s krajními body $x_i = a + ih$, $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Dostaneme:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx h \cdot f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right),\ i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

  - a součtem přes vš. podintervaly pak:

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx \approx R(h) = h\left[f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) + \ldots + f\left(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\right)\right]$$

  - chyba $\leq \frac{M_2}{24}(b-a)h^2$, kde $M_2 = max_{x\in\langle a,b\rangle} |f''(x)|$
- lichoběžníková metoda (řádu 2)

$$l(x) = f(x_{i-1}) + \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}(x - x_{i-1}).$$

$$I \sim \tfrac{1}{2}h(f(x_0)+f(x_1)) + \tfrac{1}{2}h(f(x_1)+f(x_2)) + \cdots + \tfrac{1}{2}h(f(x_{n-1})+f(x_n))$$
$$= \frac{1}{2}h\Big[\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) + \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Big] = \frac{1}{2}h\Big[f(x_0) + \sum_{i=1}^{n-1} 2f(x_i) + f(x_n)\Big] = T(n).$$

-
  - používá uzavřenou Newtonovu-Cotesovu metodu pro 2 uzly
  - Rozdělíme interval <a,b> na n podintervalů délek (b-a)/n = h s krajními body $x_i = a + ih$, $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Dostaneme:
$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx h \cdot \frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2},\ i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$
  - a součtem přes vš. podintervaly pak:
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx T(h) = h\left[\tfrac{1}{2}f(a) + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1}) + \tfrac{1}{2}f(b)\right]$$
  - chyba $\leq \frac{M_2}{12}(b-a)h^2$, kde $M_2 = max_{x \in <a,b>} |f''(x)|$ M
- Simpsonova metoda (řádu 4)
  - animace: http://mathfaculty.fullerton.edu/mathews/a2001/Animations/Quadrature/Simpson41/Simpsonaa.html
  - používá uzavřenou Newtonovu-Cotesovu metodu pro 3 uzly
  - Rozdělíme interval <a,b> ekvidistantně na podintervaly a každý z nich na dva stejně dlouhé podintervaly. Pro lepší srovnání s ostatními metodami je zvykem označovat písmenem n **sudý počet** všech takto vzniklých podintervalů délky (b-a)/n = h s krajními body $x_i = a + ih$, $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Dostaneme:
$$\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)\,dx \approx 2h \cdot \frac{f(x_{2i-2})+4f(x_{2i-1})+f(x_{2i})}{6},\ i \in \{1, 2, \ldots, \tfrac{n}{2}\}$$
  - a součtem přes všechny podintervaly pak:
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx S(h) = \tfrac{h}{3}\left[f(a) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \ldots + 2f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(b)\right]$$
  - chyba $\leq \frac{M_4}{180}(b-a)h^4$, kde $M_4 = max_{x \in <a,b>} \left|f^{(4)}(x)\right|$
- odhad chyby metodou poloviční kroku
  - chyba $\approx \frac{1}{2^{řád}-1}[F(h) - F(2h)]$, kde řád je řád použité metody, F je typ metody, h krok
- Richardsonova extrapolace - tady jsou prostě nějaký sračky...
  - x(h) + chyba (metoda poloviční kroku)
  - $F_1(h) = F(h) + (F(h) - F(kh))/(k^p - 1)$
    - speciální případ k=2: metoda poloviční kroku